



**Kounouz**  
Education

Deuxième année de l'enseignement secondaire

2<sup>ème</sup>

# Kounouz Ennajeh

## MATHEMATIQUES

- Résumés de Cours
- Exercices

$\infty$   $\sqrt{\quad}$

$2a+b=x^{2x}$   $4u$

$\pi=3.141592654$   $y=\frac{-x}{2}+1$

$\frac{2x}{+2}=5$   $x=5$

Sections

Scientifiques



**Corrigés Détaillés**  
de tous les exercices



كنوز للنشر والتوزيع  
KOUNOUZ EDITIONS



# MATHÉMATIQUES

## Section scientifiques

❧ 2<sup>ème</sup> Année ❧

- ✦ *Résumés*
- ✦ *Exercices*
- ✦ *Corrigé des exercices*

**Abderrahmen Mimouni**  
Inspecteur Principale  
de écoles préparatoires et des lycées  
secondaire

**Mohamed Ben Brahim**  
Professeur principale

**Sami Ben Rhim**  
Professeur de l'enseignement  
Secondaires

**Abdbasset Laataoui**  
Professeur Principale



**© Kounouz Editions**

**Adresse :** 123, Avenue Habib Thameur

Nabeul – 8000 Tunisie

**Tél :** (+216) 72 223 822

**Fax :** (+216) 72 223 922

**E-mail :** [Kounouz.Edition@gnet.tn](mailto:Kounouz.Edition@gnet.tn)

**Site Web :** [www.Kounouz-Edition.com](http://www.Kounouz-Edition.com)

**©Copyright**



# Chapitre N° 1

## **Avant-propos**

✦ Ce manuel est conçu dont :

- la simplicité d'utilisation favorise le travail en autonomie de l'élève.
- l'accessibilité tient compte des attentes diverses des élèves.
- la variété des situations et des exercices permet de développer les notions.

✦ Chaque chapitre se décompose de la façon suivante :

- un résumé du cours écrit dans un langage simple, suivi d'un exemple et / ou d'une méthode pour mettre en pratique la notion.

- Des exercices dans quatre rubriques :

⇒ **QCM** : permet de vérifier l'acquisition des savoirs et la maîtrise des savoir-faire.

⇒ **Appliquer** : l'élève dispose ainsi en vis-à-vis d'outils favorisant l'acquisition des savoirs et des savoir-faire.

⇒ **S'entraîner et se perfectionner** : offrent des exercices dans lesquels sont mis en œuvre les diverses notions du chapitre dans une démarche plus approfondie ou en les associant à d'autres notions abordés précédemment. Leur nombre et leur variété permettent de répondre aux différents besoins des élèves.

**Les auteurs**



# ALGÈBRE





## Calculs dans IR

### I) Résumé de cours

#### • Puissances :

Pour tous réels non nuls  $a$  et  $b$  et tous entiers relatifs  $m$  et  $n$  on a :

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n ; \quad (a^n)^m = a^{n \times m} ; \quad a^n \times a^m = a^{n+m} ; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} .$$

#### • Identités remarquables :

Pour tous réels  $a$  et  $b$  on a :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ; \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 ; \quad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 ;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 ; \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 ;$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \text{ et } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) .$$

#### • Radicaux :

- Pour tout réel positif  $a$ , l'équation  $x^2 = a$  admet pour solutions les réels  $(-\sqrt{a})$  et  $\sqrt{a}$ .

- Pour tous réels positifs  $a$  et  $b$  on a,  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ .

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})$  s'appelle l'**expression conjuguée** de  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ .

- Pour tous réels positifs  $a$  et  $b$  et tout entier  $n$  on a,  $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$  ;  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$  (avec

$b \neq 0$ ) ;  $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$  ; et en particulier on a :  $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a$ .

- Pour tous réels  $a$ ,  $\sqrt{a^2} = |a|$ .

#### • Inégalités, encadrement et valeur absolue :

- Pour tous réels positifs  $a$  et  $b$  on a :  $(a \leq b)$  équivaut à  $(a^2 \leq b^2)$

- Pour tous réels  $a$  et  $b$  non nuls et de même signe, si  $(a < b)$  alors  $(\frac{1}{b} < \frac{1}{a})$  .

- Pour tous réels  $a$  et  $b$  on a,  $(a \leq b)$  équivaut à  $(-b \leq -a)$  .

- Pour tous réels positifs  $a$  et  $b$  on a :  $(a < b)$  équivaut à  $(\sqrt{a} < \sqrt{b})$

- Etant des nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $a < c$  :

Si on a  $(a \leq b \leq c)$ , alors on dit que  $(a \leq b \leq c)$  est un **encadrement** du réel  $b$  par les réels  $a$  et  $c$ .

- Soit  $x$  un réel. La **valeur absolue** de  $x$  est le réel positif noté  $|x|$  qui est défini par :  $|x| = x$  si  $x \geq 0$  et  $|x| = -x$  si  $x \leq 0$  .

- Si  $a > 1$  alors  $1 < \sqrt{a} < a < a^2$ .



- Si  $0 < a < 1$  alors  $0 < a^2 < a < \sqrt{a}$ .

## • Proportion - Partage proportionnel - Pourcentage :

- Une **proportion** est une égalité de deux rapports du type  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ .

Ainsi, si  $(\frac{a}{b} = \frac{c}{d})$  on dit que  $a$  et  $c$  sont **proportionnels** à  $b$  et  $d$

- Soient  $a, b, c$  et  $d$  des réels non nuls : On a  $(\frac{a}{b} = \frac{c}{d})$  équivaut à  $(\frac{a}{c} = \frac{b}{d})$  ou encore  $(ad = bc)$ .

- Pour tous réels  $a, b, x$  et  $y$  tels que  $x, y$  et  $x+y$  sont non nuls : Si  $(\frac{a}{x} = \frac{b}{y})$  alors  $(\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{a+b}{x+y})$ .

- Si une grandeur  $x$  vaut  $t\%$  d'une grandeur donnée  $y$  alors  $x = \frac{t}{100} \times y$ .

- Si une grandeur  $P$  subit une réduction de  $t\%$  alors il devient  $(1 - \frac{t}{100}) \times P$ . Le nombre  $(1 - \frac{t}{100})$  est appelé le coefficient multiplicateur associé à cette réduction de  $P$ .

## • Notation scientifique d'un nombre décimal,

**Partie entière d'un réel, valeur approchée décimale et Arrondi d'un réel :**

- Soit  $x$  un nombre décimal positif :

L'écriture  $x = a.10^p$  où  $a$  est un nombre décimal tel que  $1 \leq a < 10$  et  $p$  un entier relatif s'appelle **notationscientifique** (ou écriture scientifique) de  $x$ .

### Exemples :

$\frac{1}{400}$  peut s'écrire  $0,0025$  ou bien  $2,5 \times 10^{-3}$ .

- Soit  $x$  un réel :

Il existe un unique entier relatif  $a$  tel que  $a \leq x < a + 1$ .

L'entier  $a$  est appelé la **partie entière** de  $x$ , il est noté  $E(x)$ .

- Soient  $x$  et  $\alpha$  deux réels tels deux que  $\alpha > 0$ .

On dit qu'un nombre décimal  $a$  est une valeur approchée décimale de  $x$  par défaut, à  $\alpha$  près si on a :  $a \leq x < a + \alpha$ .

On dit qu'un nombre décimal  $a$  est une valeur approchée décimale de  $x$  par excès, à  $\alpha$  près si  $(a - \alpha) < x \leq a$ .

Soient  $x$  et  $\alpha$  deux réels tels que  $\alpha > 0$ . On dit qu'un nombre décimal  $a$  est une valeur approchée décimale de  $x$  à  $\alpha$  près si  $(|x - a| \leq \alpha)$  et on a :



- si  $a < x$  alors  $a$  est une valeur approchée décimale de  $x$  par défaut, à  $\alpha$  près.
- si  $a > x$  alors  $a$  est une valeur approchée décimale de  $x$  par excès, à  $\alpha$  près.
- Pour déterminer un **arrondi** d'un réel  $x$ , il suffit de connaître une valeur approchée décimale de  $x$  puis prendre l'arrondi de cette valeur approchée décimale.

### Exemples :

On a : 3,1415926535897926 est une valeur approchée décimale de  $\pi$  à  $10^{-15}$  près.

Ainsi :

- L'arrondi de  $\pi$  à deux décimale est 3,14 .
- L'arrondi de  $\pi$  à 15 décimales est 3,141592653589793.

L'arrondi de 65392 au millier est 65000 et l'arrondi de 65392 au centaine est 65400.

## II) Exercices

### 1 Q-C-M

1) Le prix de l'or a augmenté de 250 % depuis quelques années. Il faut multiplier son ancien prix par  $n$  pour obtenir son nouveau prix, avec :

$\square n = 2,5$        $\square n = 250$        $\square n = 3,5$

2) Le prix d'un ordinateur TTC (toutes taxes comprises) est de 1562D. La taxe est de 10 %. Quel est son prix Hors taxes ?

$\square 1620D.$        $\square 1546D.$        $\square 1420D.$

3) La valeur approchée par excès de  $\sqrt{72}$  à  $10^{-4}$  près est :

$\square 8,485$      $\square 8,486$        $\square 8,4852$        $\square 8,4853.$

Sachant que  $\sqrt{72} \approx 8,4852814$ .

4) Indiquer l'ensemble le plus petit auquel appartient chacun des nombres suivants après avoir simplifier son écriture :

$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$  :     $\square N$   $\square Z$   $\square ID$   $\square Q$   $\square R$

$\frac{\sqrt{36}}{5} + \frac{4}{\sqrt{25}}$  :       $\square N$   $\square Z$   $\square ID$   $\square Q$   $\square R$

### 2 APPLIQUER

1. Simplifier l'écriture de chacun des réels suivants :

$A = \frac{18^2 \times 4^{-4}}{(0,75)^4 \times 2^2}$  ;  $B = \frac{(a^2 \times b^3)^{-2} \times a}{a^2 \times b^{-5}}$  ;  $(-ab^2)^4 \times (a^{-4}b^{-2}) \times b^4$  .



2. Déterminer la valeur numérique de l'expression  $A = 2^x - x^2 + 2x$  dans chacun des cas suivants :

a)  $x = 1$  ; b)  $x = -1$  ; c)  $x = 0$  ; d)  $x = -2$  ; e)  $x = 2$  ; f)  $x = 10$  .

3. Calculer mentalement, chacun des nombres suivants :  $99^2$  ;  $89 \times 91$  ;  $101^2 - 99^2$  .

### 3 APPLIQUER

Ecrire chacun des nombres suivants sous forme de quotient dont le dénominateur ne contient pas de radicaux :

$$A = \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{7\sqrt{3} - 2\sqrt{2}} , \quad B = \frac{\sqrt{5} + 7}{\sqrt{5} - 7} , \quad C = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} ,$$

$$D = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} , \quad E = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{6}} , \quad F = \frac{\sqrt{11} + 11}{\frac{11}{\sqrt{11}} + 1} .$$

### 4 APPLIQUER

Soit  $a$  un réel strictement positif. Montrer que

Si  $x$  est un réel appartenant à  $[0, a]$  alors  $(a - x)$  appartient aussi à  $[0, a]$

### 5 S'ENTRAINER

1) Montrer que pour tous réels  $a, b, c$  et  $d$  on a :  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$

2) Ecrire le nombre  $208 \times 1184$  sous la forme d'une somme de deux carrés d'entiers.

### 6 S'ENTRAINER

$$\text{Soit } a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

1) Vérifier que  $a^2 + a - 1 = 0$  et que  $\frac{1}{a} = a + 1$ .

2) Montrer alors que  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}} + \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}} = \sqrt{5}$ .

### 7 S'ENTRAINER

Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs et distincts.



1) Montrer que  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$ .

2) Montrer que  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{a+b}$ .

3) a) Montrer que  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$ .

b) En déduire que pour  $a$  distinct de 1, on a :  $a + \frac{1}{a} > 2$ .

## 8 S'ENTRAINER

Ecrire en notation scientifique les nombres suivants :

$30^{10}$ ,  $(17,5)^{55}$ ,  $(0,01)^6$ ,  $(2006)^{10}$ ,  $(3000)^{-5}$ ,  $(0,031)^2 \times (0,05)^4$ ,  $\frac{1}{125000}$  et

$\frac{(0,2)^4 \times (0,05)^2}{(5000)^3}$

## 9 SEPERFECTIONNER

1) Ecrire sans le symbole de la valeur absolue chacun des réels suivants :

$|1 - \sqrt{2}|$  ;  $|\pi - \sqrt{3}|$  ;  $|2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{3}|$  ;  $|3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}|$  ;  $|-3 + \frac{1}{3} + \sqrt{2}|$

2) Soit  $x$  un réel appartenant à l'intervalle  $[-1, 1]$ .

a) Simplifier l'écriture de l'expression  $A(x) = 2|1-x| + |2x-2|$ .

b) En déduire  $A(0,33)$  et  $A(-0,001)$ .

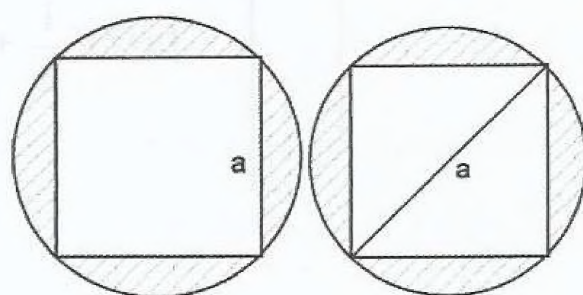
c) Donner un encadrement de l'expression  $B(x) = x + 2|1-x| + |2x-2|$ .

## 10 SEPERFECTIONNER

1) On considère une couronne limitée par deux cercles concentriques de rayons respectifs  $r$  et  $R$  tels que  $1,1 < r < 1,2$  et  $2,2 < R < 2,3$ .

On désigne par  $S$  l'aire de cette couronne. Déterminer un encadrement de  $S$ .

2) On donne :  $3,14 \leq \pi \leq 3,15$  et  $0,98 \leq a \leq 1,02$  (en m). Dans chacune des deux figures suivantes, déterminer un encadrement de l'aire hachurée :





### 1 Q-C-M

1.  $\boxed{x}n = 3,5$  ;
2.  $\boxed{x}1420D$  ;
3.  $\boxed{x}8,4853$  ;
4.  $(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = -1 \in \mathbb{Z}$  ;  $\frac{\sqrt{36}}{5} + \frac{4}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5} + \frac{4}{5} = 2 \in \mathbb{N}$

### 2 APPLIQUER

1.  $A = \frac{2^2 \times 3^4 \times 2^{-8}}{3^4 \times 2^{-8} \times 2^2} = 1$  ;  $B = \frac{a^{-4} \times b^{-6} \times a}{a^2 \times b^{-5}} = a^{-5} \times b^{-1} = \frac{1}{a^5 \times b}$  ;  
 $C = a^4 \times b^8 \times a^{-4} \times b^{-2} \times b^4 = b^{10}$ .
2. a) Si  $x = 1$  alors  $A = 2^1 - 1^2 + 2 \times 1 = 2 - 1 + 2 = 3$   
 b) Si  $x = -1$  alors  
 $A = 2^{-1} - (-1)^2 + 2 \times (-1) = \frac{1}{2} - 1 - 2 = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$ .  
 c) Si  $x = 0$  alors  $A = 2^0 - 0^2 + 2 \times 0 = 1 - 0 + 0 = 1$ .  
 d) Si  $x = -2$  alors  
 $A = 2^{-2} - (-2)^2 + 2 \times (-2) = \frac{1}{4} - 4 - 4 = \frac{1}{4} - 8 = -\frac{31}{4}$ .  
 e) Si  $x = 2$  alors  $A = 2^2 - 2^2 + 2 \times 2 = 4$ .  
 f) Si  $x = 10$  alors  
 $A = 2^{10} - 10^2 + 2 \times 10 = 1024 - 100 + 20 = 944$ .
3.  $99^2 = (100-1)^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$   
 $89 \times 91 = (90-1) \times (90+1) = 90^2 - 1^2 = 8100 - 1 = 8099$ .  
 $101^2 - 99^2 = (101-99) \times (101+99) = 2 \times 200 = 400$ .

### 3 APPLIQUER

$$A = \frac{(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(7\sqrt{3} + 2\sqrt{2})}{139} = \frac{46 + 11\sqrt{6}}{139}$$

$$B = \frac{\sqrt{5} + 7}{\sqrt{5} - 7} = \frac{(\sqrt{5} + 7)^2}{-44} = -\frac{5 + 49 + 14\sqrt{5}}{44} = -\frac{27 + 7\sqrt{5}}{22}$$

$$C = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{1} = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$D = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$E = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{6})}{-3} = \frac{3 - \sqrt{18}}{-3} = \frac{3 - 3\sqrt{2}}{-3} = -1 + \sqrt{2}$$

$$F = \frac{\sqrt{11} + 11}{\frac{11}{\sqrt{11}} + 1} = \sqrt{11}$$

### 4 APPLIQUER

Soit  $a > 0$ .  
 $x \in [0, a]$  signifie  $0 \leq x \leq a$  signifie  $-a \leq -x \leq 0$   
 signifie  $0 \leq a - x \leq a$ .

### 5 S'ENTRAINER

- 1)  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$   
 $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd + a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd$   
 $= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$ ,  
 ainsi  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ .
- 2)  $208 = 12^2 + 8^2$  et  $1184 = 20^2 + 28^2$ , ainsi  $208 \times 1184 = (12^2 + 8^2)(20^2 + 28^2)$   
 $= (240 + 224)^2 + (336 - 160)^2$   
 $= 446^2 + 176^2$

### 6 S'ENTRAINER

- 1) On a :  $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  ,  $a^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$  ,  
 $\frac{1}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$   
 (Vérifier maintenant que  $a^2 + a - 1 = 0$  et  $\frac{1}{a} = a+1$ ).
- 2)  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}} + \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}} = \frac{a+a+1}{\sqrt{a(a+1)}} = \frac{2a+1}{\sqrt{a^2+a}}$   
 $\frac{\sqrt{5}-1+1}{\sqrt{1}} = \sqrt{5}$

### 7 S'ENTRAINER

- $a > 0$  ;  $b > 0$  et  $a \neq b$ .
- 1) On a :  $a + b + 2\sqrt{ab} > a + b$  c'est-à-dire  
 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2$   
 et par suite  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$ .
  - 2) On a :  $\frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b} = 2 + (\frac{b}{a} + \frac{a}{b}) > 1$  donc  
 $(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) > 1$  et par conséquent  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{a+b}$



3) a) On a :  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$

et comme  $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 > 0$

on obtient  $\frac{a^2 + b^2}{ab} - 2 > 0$

et par conséquent  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$ .

b) En appliquant le résultat précédent pour  $b = 1$   
( $a \neq b$  c'est-à-dire  $a \neq 1$ ),  $a + \frac{1}{a} > 2$ .

### 8 S'ENTRAINER

$30^{10} = 5.9049 \times 10^{14}$  ;  $(17.5)^{55} = 2.3285881 \times 10^{68}$  ;

$(0.01)^6 = 1 \times 10^{-12}$  ;  $(2006)^{10} = 1.0551381 \times 10^{33}$  ;

$(3000)^{-5} = 4.1152263 \times 10^{-18}$  ;

$(0.031)^2 \times (0.05)^4 = 6.00625 \times 10^{-9}$  ;

$\frac{1}{125000} = 8 \times 10^{-6}$  ;

$\frac{(0.2)^4 \times (0.05)^2}{(5000)^3} = 3.2 \times 10^{-17}$

### 9 SE PERFECTIONNER

1)  $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$  ;

$|\pi - \sqrt{3}| = \pi - \sqrt{3}$  ;  $|2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{3}| = 2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{3}$  ;

$|3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}| = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$  ( $(3\sqrt{2})^2 = 18 > (2\sqrt{3})^2 = 12$ ) ;

$|-3 + \frac{1}{3} + \sqrt{2}| = 3 - \frac{1}{3} - \sqrt{2}$ .

2)  $x \in [-1, 1]$ .

a)  $A(x) = 2|1 - x| + |2x - 2| = 2|1 - x| + 2|x - 1|$   
 $= 4|1 - x| = 4(1 - x)$ .

b)  $A(0.33) = 4(1 - 0.33) = 2.68$  ;

$A(-0.001) = 4(1 + 0.001) = 4.004$ .

c)  $B(x) = x + 4(1 - x) = 4 - 3x$ .

$-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq -3x \leq 3$

$\Leftrightarrow 1 \leq 4 - 3x \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq B(x) \leq 4$ .

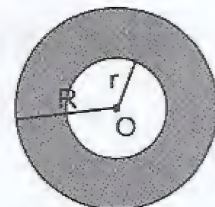
### 10 SE PERFECTIONNER

1) Soit S l'aire de la couronne limitée par les deux cercles concentriques

(de même centre O) de rayons r et R.

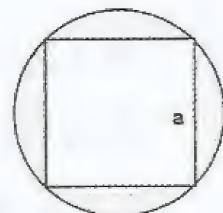
On a  $S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2)$

(Encadrer à ton tour S)



2) Dans la 1<sup>ère</sup> figure, le rayon du cercle est la moitié de la diagonale du carré donc l'aire de la partie hachurée est

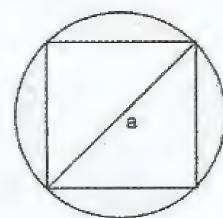
$\pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - a^2 = a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ .



Dans la 2<sup>ème</sup> figure, le rayon du cercle est la moitié de la diagonale du carré donc l'aire de la partie hachurée est

$\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2 \left(\frac{\pi}{4} - 0.5\right)$ .

(Encadrer à ton tour les deux parties hachurées).







## Problèmes du premier degré et du second degré

### I) Résumé de cours

✦ L'équation  $ax + b = 0$ , où  $x$  est l'inconnue réelle et  $a$  un réel non nul donné, admet une unique solution dans  $\mathbb{R}$  :  $x = -\frac{b}{a}$ .

✦ Les solutions de l'équation  $(ax + b)(cx + d) = 0$  sont les solutions de chacune des équations  $ax + b = 0$  et  $cx + d = 0$  ; (on a appliqué la propriété :  $uv = 0$  signifie  $u = 0$  ou  $v = 0$ ).

• **Tableau de signe du binôme  $ax + b$  ( $a \neq 0$ ) :**

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
<b>Signe du binôme <math>ax + b</math></b>	<b>Signe de <math>(-a)</math></b>		<b>Signe de <math>a</math></b>

- Pour résoudre une équation ou une inéquation comportant une inconnue au dénominateur on pourra utiliser ce qui suit :

✦ Il faut que le dénominateur de la fraction ne soit pas nul.

✦  $\left(\frac{a}{b} = 0\right)$  équivaut à  $(a = 0 \text{ et } b \neq 0)$

✦ Pour tous réels  $a, b, c$  et  $d$  tels que  $b \neq 0$  et  $d \neq 0$ . On a :

✦  $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right)$  équivaut à  $(ad = bc)$ .

✦ Ramener  $\frac{ax+b}{cx+d} \leq e$  à la forme  $mx + p \leq 0$  et faire une étude du signe du binôme

$mx + p$  ( $x$  étant l'inconnue).

- Pour chercher le signe d'un produit, on peut chercher le signe de chaque facteur et appliquer la règle de signe.

- Pour résoudre une équation ou une inéquation contenant des valeurs absolues on pourra utiliser ce qui suit :

✦ Pour tous réels  $a$  et  $b$  on a :  $(|a| = |b|)$  équivaut à  $(a = b \text{ ou } a = -b)$

✦ Pour tous réels positifs  $a$  et  $b$  on a :  $(a \geq b)$  équivaut à  $(a^2 \geq b^2)$

- Pour résoudre une équation ou une inéquation contenant un radical on pourra utiliser ce qui suit :





- ✦ Pour tous réels  $a$  et  $b$  on a :  $(a = b)$  équivaut à  $(a^2 = b^2)$
- ✦ Pour tous réels positifs  $a$  et  $b$  on a :  $(a \geq b)$  équivaut à  $(a^2 \geq b^2)$

• **Résolution d'équations et d'inéquations du second degré :**

A) Soit l'équation du second degré :  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont trois réels tels que  $a$  soit non nul et soit  $\Delta = b^2 - 4ac$  son discriminant.

- Si  $\Delta < 0$ , l'équation n'a pas de solutions (racines).
- Si  $\Delta = 0$ , l'équation a une seule solution (racine double)

$x_0 = -\frac{b}{2a}$  et on a dans ce cas  $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$

- Si  $\Delta > 0$ , l'équation a pas deux solutions (racines) distinctes

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  ;  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  et dans ce cas on a :  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$  .

B) Soit le trinôme du second degré  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont trois réels tels que  $a$  soit non nul et  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

- Si  $\Delta < 0$  alors pour tout réel  $x$ , le trinôme  $f(x)$  est du signe de  $a$ .
- Si  $\Delta = 0$  alors pour tout réel  $x$  distinct de  $-\frac{b}{2a}$ , le trinôme  $f(x)$  est du signe de  $a$ .
- Si  $\Delta > 0$  alors pour tout  $x$  à l'extérieur des racines  $x'$  et  $x''$  de l'équation  $f(x) = 0$ , le trinôme  $f(x)$  est du signe de  $a$  et pour tout  $x$  entre  $x'$  et  $x''$ , le trinôme  $f(x)$  est du signe de  $(-a)$ .

**II) Exercices**



**Q-C-M**

Dans chaque cas, une seule réponse est exacte. Laquelle ?

L'ensemble des solutions de l'équation $4x = 7x + 2$	$S = \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$	$S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$	$S = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$
L'ensemble des solutions de $\left(x - \frac{5}{4}\right)(5x + 4) = 0$	$S = \left\{ -\frac{5}{4}, \frac{4}{5} \right\}$	$S = \left\{ \frac{5}{4} \right\}$	$S = \left\{ -\frac{4}{5}, \frac{5}{4} \right\}$
$\frac{2x-6}{x-8} = 0$ est équivalent à :	$x = 3$	$x = 3$ et $x \neq 8$	$x = 3$ et $x = 8$



Une équation du second degré dans IR admet toujours	Au moins deux solutions	Au plus deux solutions	Exactement deux solutions
La somme des racines de l'équation $ax^2+bx+c$ ; $a \neq 0$ est égale à	$-\frac{b}{2a}$	$\frac{c}{a}$	$-\frac{b}{a}$
Si l'équation $ax^2+bx+c$ ; $a \neq 0$ admet -1 et 1 comme racines, alors:	$b = 0$	$c = 0$	$\Delta = 0$
Sachant que $\frac{7}{3}$ est une racine de l'équation $3x^2-x-14=0$ , alors la deuxième racine est	-1	-2	1

2

APPLIQUER

Résoudre, dans IR, chacune des équations suivantes :

(E) :  $3x + 2 + 5(4 - x) = 8 - 2x.$

(G) :  $\frac{2x + 3}{x - 4} - \frac{x + 1}{x + 4} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 16}.$

(F) :  $\frac{x}{2} + \frac{x - 1}{3} = \frac{5x - 2}{6}.$

(H) :  $\frac{(x^2 - 9)(x^2 - 16)}{(x - 3)(x + 4)} = 0$

3

APPLIQUER

- a) Montrer que pour tout réel x on a :  $3x^2 + x - 4 = (x-1)(3x+4).$
- b) Résoudre alors, dans IR, l'équation  $3x^2 + x - 4 = 0$  et l'inéquation  $3x^2 \geq 4 - x.$

4

APPLIQUER

Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de :

1.  $f_1(x) = 8x^2 + 8x + 2$
2.  $f_2(x) = 2x^2 - 3x + 2$
3.  $f_3(x) = -x^2 - 3x + 10$

Sans calculer  $f_3(-7)$ ,  $f_3(1/2)$ ,  $f_3(148)$ , indiquer les signes de ces nombres.





### 5 APPLIQUER

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1.  $2x^2 - 3x + 2 < 0$  \*\* 2.  $8x^2 + 8x + 2 \leq 0$  \*\* 3.  $-x^2 - 3x + 10 < 0$

### 6 APPLIQUER

a) Résoudre, dans  $\mathbb{R}$ , l'équation :  $\sqrt{4x^2 - 1} = 2x - 1$ .

b) Résoudre, dans  $\mathbb{R}$ , l'inéquation :  $\sqrt{4x^2 - 1} \leq 2x - 1$ .

**Exercice n°6 :**

Résoudre, dans  $\mathbb{R}$ , les inéquations suivantes :

$x - \sqrt{2x + 3} \leq 6$  ;  $x + \sqrt{3x - 2} - \sqrt{4x + 1} \geq 0$  ;  $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x - 2} \geq 0$ .

### 7 APPLIQUER

a) Résoudre, dans  $\mathbb{R}$ , les inéquations suivantes :  $\frac{x+5}{2x-3} \leq 7$  ;  $\frac{6x+1}{2x-3} \geq \frac{3x-2}{x+1}$

b) Représenter graphiquement leurs ensembles de solutions sur un axe.

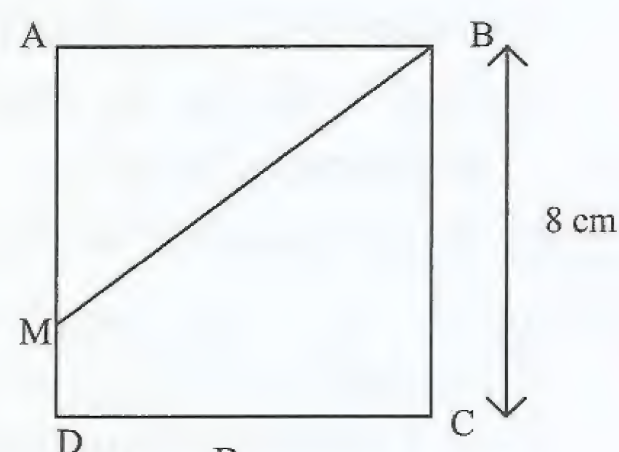
### 8 APPLIQUER

Résoudre, dans  $\mathbb{R}$ , les inéquations suivantes :

$x \leq x(x - \frac{1}{2})$  ;  $x(1 - 2x) \geq 4x - 2$  ;  $(2x + 3)^2 \geq (x + 1)^2$  ;  $\frac{1}{4}x^2 \leq x$  ;  $4(x - 2)^2 - 9 \leq 0$ .

### 9 S'ENTRAINER

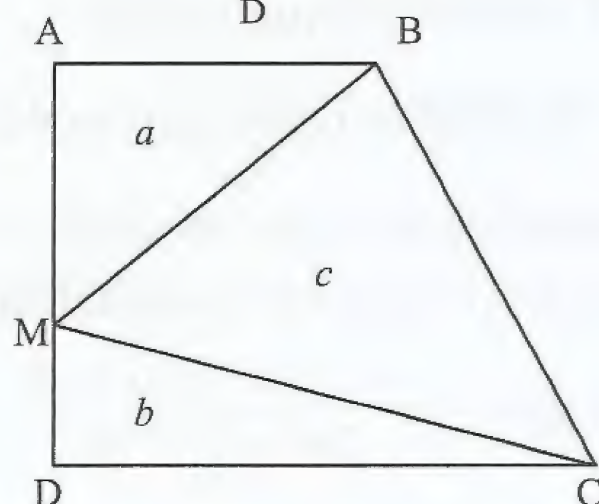
Soit ABCD un carré et M un point de [AD] différent de A et de D. Comment choisir M pour que l'aire du triangle AMB soit le quart de l'aire du trapèze BCDM ?  
(Le côté du carré mesure 8 cm)



### 10 S'ENTRAINER

Dans la figure ci-contre, les nombres a, b, c désignent les aires des triangles ABM, CDM et BCM.

AB = 6, AD = 8 et DC = 10.







Pour quelle valeur de  $x = AM$  a-t-on:

- 1)  $a = b$  ?
- 2)  $c = a + b$  ?
- 3)  $CM = MB$  ?
- 4)  $MB = \sqrt{34}$  ?

**S'ENTRAINER**

On considère l'équation (E):  $3x^2 - 5x - 2 = 0$

- 1) a) Sans calculer le discriminant  $\Delta$ , dire pourquoi (E) admet deux racines distinctes.
- b) Sans calculer les racines  $x'$  et  $x''$  de (E), calculer  $A = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$  et  $B = (3x' + 1)(3x'' + 1)$
- 2) a) Résoudre dans IR, l'équation (E)
- b) Trouver l'ensemble des réels  $x$  pour lesquels  $\sqrt{3x^2 - 5x - 2}$  ait un sens.
- c) Résoudre dans IR, l'équation  $\sqrt{3x^2 - 5x - 2} = \sqrt{6}$
- 3) On considère le quotient  $Q(x) = \frac{3x^3 + 4x^2 - 17x - 6}{3x^2 - 2x - 1}$ 
  - a) Trouver l'ensemble des réels  $x$  pour lesquels  $Q(x)$  ait un sens.
  - b) Développer l'expression  $(3x^2 - 5x - 2)(x + 3)$ ; puis simplifier le quotient  $Q(x)$ .
  - c) Résoudre dans IR, l'inéquation  $Q(x) \geq 0$

**SEPERFECTIONNER**

Soit, dans IR, l'équation (E) :  $x^2 + x - 20 = 0$ .

- 1) Sans calculer le discriminant  $\Delta$ , montrer que l'équation admet deux racines distinctes  $x'$  et  $x''$ .
- 2) Sans calculer  $x'$  et  $x''$ , donner les valeurs numériques des expressions, suivantes:  
 $A = \frac{4}{x'} + \frac{4}{x''}$  ;  $B = x'^2 + x''^2$
- 3) a) Résoudre l'équation (E)
- b) En déduire la résolution dans IR de l'équation  $(x - \frac{5}{x})^2 + (x - \frac{5}{x}) - 20 = 0$ .
- 4) a) Développer puis simplifier  $(-x - 1)(x^2 + x - 20)$
- b) Résoudre dans IR, l'inéquation  $-x^3 - 2x^2 + 19x + 20 > 0$ .
- 5) Soit  $Q(x) = \frac{-x^3 - 2x^2 + 19x + 20}{2x^2 + 12x + 10}$





a) Pour quelles valeurs de  $x$ , l'expression  $Q(x)$  a un sens ?

b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $|Q(x)| - Q(x) = 0$ .

13

**SEPERFECTIONNER**

1) Déterminer les réels  $x$  et  $y$  vérifiant le système suivant :  $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$

2) Soit l'expression  $A(x) = x^2 - 3x + 2$

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'inéquation  $A(x) \geq 0$

3) Soit l'expression  $B(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

a) Déterminer l'ensemble  $D$  sur lequel  $B(x)$  est définie

b) Montrer que pour tout  $x \in D$ ,  $B(x) = \frac{x+2}{x-1}$

c) Dédire la résolution dans  $D$  de l'équation  $B(x) = 0$  et de l'inéquation  $B(x) \geq x$

14

**SEPERFECTIONNER**

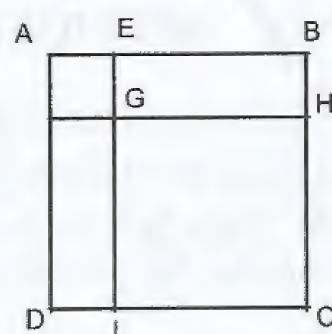
Le carré  $ABCD$  mesure 10cm de coté,  $E$  est un point de  $[AB]$  tel que  $AEGH$  et  $GHCI$  soient deux carrés.

a) On pose  $AE = x$ , calculer l'aire  $S_1$  du carré  $AEGH$  et l'aire  $S_2$  du carré  $GHCI$  en fonction de  $x$ .

b) On pose  $S(x) = S_1 + S_2$ , montrer que  $S(x) = 2x^2 - 20x + 100$

Déterminer  $x$  pour que  $S(x)$  soit égale à la moitié de l'aire

c) du carré  $ABCD$ .



15

**SEPERFECTIONNER**

Soit  $ABC$  un triangle rectangle en  $B$  tel que  $BA = 4$  cm et  $BC = 8$  cm.

$M$  est un point du segment  $[AC]$  distinct de  $A$  et  $C$ . On note  $E$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $(BC)$  et  $F$  celui de  $M$  sur  $(AB)$ . On pose  $AF = x$ .

1) On désigne par  $S(x)$  l'aire du rectangle  $FMEB$ . Montrer que  $S(x) = -2x^2 + 8x$ .

2) a) Déterminer la valeur maximale de  $S(x)$ .

b) Pour quelle valeur de  $x$ ,  $S(x)$  atteint sa valeur maximale ?



1

Q-C-M

L'ensemble des solutions de l'équation $4x = 7x + 2$	$S = \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$		
L'ensemble des solutions de $\left(x - \frac{5}{4}\right)(5x + 4) = 0$			$S = \left\{ -\frac{4}{5}, \frac{5}{4} \right\}$
$\frac{2x-6}{x-8} = 0$ est équivalent à :		$x = 3$ et $x \neq 8$	
Une équation du second degré dans $\mathbb{R}$ admet toujours		Au plus deux solutions	
La somme des racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ; $a \neq 0$ est égale à			$-\frac{b}{a}$
Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ; $a \neq 0$ admet -1 et 1 comme racines, alors :	$b = 0$		
Sachant que $\frac{7}{3}$ est une racine de l'équation $3x^2 - x - 14 = 0$ , alors la deuxième racine est		-2	

2

APPLIQUER

\*  $3x + 2 + 5(4 - x) = 8 - 2x$  signifie

$3x + 2 + 20 - 5x = 8 - 2x$  Signifie

$3x - 5x + 2x = 8 - 2 - 20$

Signifie  $0 \cdot x = -14$  impossible ;  $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$ .

\*  $\frac{x}{2} + \frac{x-1}{3} = \frac{5x-2}{6}$  signifie  $\frac{3x+2(x-1)}{6} = \frac{5x-2}{6}$

Signifie  $3x + 2(x-1) = 5x - 2$

Signifie  $3x + 2x - 5x = -2 + 2$

Signifie  $0 \cdot x = 0$  toujours vraie ;

$S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ .

\*  $\frac{2x+3}{x-4} - \frac{x+1}{x+4} = \frac{x^2+2x-1}{x^2-16}$

Condition :  $\begin{cases} x-4 \neq 0 \\ x+4 \neq 0 \\ x^2-16 \neq 0 \end{cases}$

signifie  $\begin{cases} x-4 \neq 0 \\ x+4 \neq 0 \end{cases}$  signifie  $\begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq -4 \end{cases}$

signifie  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$ .

Résolution :

$\frac{2x+3}{x-4} - \frac{x+1}{x+4} = \frac{x^2+2x-1}{x^2-16}$

signifie  $\frac{(2x+3)(x+4)}{x^2-16} - \frac{(x+1)(x-4)}{x^2-16} = \frac{x^2+2x-1}{x^2-16}$

Signifie  $(2x+3)(x+4) - (x+1)(x-4) = x^2+2x-1$

Signifie  $(2x^2+11x+12) - (x^2-3x-4) = x^2+2x-1$

Signifie  $x^2+14x+16 = x^2+2x-1$

Signifie  $12x = -17$  Signifie  $x = -\frac{17}{12} \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$  ;

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{17}{12} \right\}$ .

\*  $\frac{(x^2-9)(x^2-16)}{(x-3)(x+4)} = 0$

Condition :  $\begin{cases} x-3 \neq 0 \\ x+4 \neq 0 \end{cases}$  signifie  $\begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq -4 \end{cases}$  signifie

$x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 3\}$ .

Résolution :

$\frac{(x^2-9)(x^2-16)}{(x-3)(x+4)} = 0$  signifie  $\begin{cases} (x^2-9)(x^2-16) = 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 3\} \end{cases}$

signifie  $\begin{cases} x^2-9=0 \text{ ou } x^2-16=0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 3\} \end{cases}$

signifie  $\begin{cases} x = \pm 3 \text{ ou } x = \pm 4 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 3\} \end{cases}$

signifie  $x = -3$  ou  $x = 4$  ;  $S_{\mathbb{R}} = \{-3, 4\}$ .

3

APPLIQUER

a)  $(x-1)(3x+4) = 3x^2+4x-3x-4 = 3x^2+x-4$

b) \*  $3x^2+x-4 = 0$  signifie  $(x-1)(3x+4) = 0$  signifie  $x-1=0$  ou  $3x+4=0$  signifie

$x=1$  ou  $x = -\frac{4}{3}$  ;  $S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{4}{3}, 1 \right\}$ .

\*  $3x^2 \geq 4-x$  signifie  $3x^2+x-4 \geq 0$  signifie  $(x-1)(3x+4) \geq 0$

$x$	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$1$	$+\infty$	
$x-1$	-	-	0	+	
$3x+4$	-	0	+	+	
$(x-1)(3x+4)$	+	0	-	0	+

Donc  $S_{\mathbb{R}} = \left] -\infty, -\frac{4}{3} \right] \cup [1, +\infty[$ .



#### 4 APPLIQUER

1.  $\Delta = 0$  donc  $8x^2 + 8x + 2$  est du signe de  $a$  donc  $8x^2 + 8x + 2$  est positif ou nul

2.  $\Delta < 0$  donc  $2x^2 - 3x + 2$  est strictement du signe de  $a$  donc  $2x^2 - 3x + 2$  est positif.

3.  $\Delta > 0$  donc  $-x^2 - 3x + 10$  est du signe de  $a$  à l'extérieur des racines et du signe de  $-a$  à l'intérieur.

Or  $-x^2 - 3x + 10$  admet comme racines 2 et -5

Donc  $-x^2 - 3x + 10 > 0$  lorsque  $x$  appartient à  $] -5 ; 2[$

$-x^2 - 3x + 10 < 0$  lorsque  $x$  appartient à

$$]-\infty; -5[ \cup ]2; +\infty[$$

$$-x^2 - 3x + 10 = 0 \text{ lorsque } x = -5 \text{ ou } x = 2$$

$$f_3(-7) < 0, f_3(1/2) > 0 \text{ et } f_3(148) < 0$$

#### 5 APPLIQUER

1.  $\Delta < 0$  donc  $2x^2 - 3x + 2$  est strictement du signe de  $a$  donc  $2x^2 - 3x + 2$  est positif. Donc  $S = \emptyset$

2.  $\Delta = 0$  donc  $8x^2 + 8x + 2$  est du signe de  $a$  donc  $8x^2 + 8x + 2$  est positif ou nul. Donc  $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

3.  $\Delta > 0$  donc  $-x^2 - 3x + 10$  est du signe de  $a$  à l'extérieur des racines et du signe de  $-a$  à l'intérieur.

Or  $-x^2 - 3x + 10$  admet comme racines 2 et -5. Donc

$$S = ]-\infty; -5[ \cup ]2; +\infty[$$

#### 6 APPLIQUER

a)  $\sqrt{4x^2 - 1} = 2x - 1$  ; Conditions :  $\begin{cases} 4x^2 - 1 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases}$

$$\text{signifie } \begin{cases} x^2 \geq \frac{1}{4} \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \text{ signifie } \begin{cases} |x| \geq \frac{1}{2} \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{signifie } \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \text{ ou } x \leq -\frac{1}{2} \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \text{ Signifie } x \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{signifie } x \in \left[ \frac{1}{2}, +\infty \right[.$$

Résolution :

$$\sqrt{4x^2 - 1} = 2x - 1 \text{ signifie } 4x^2 - 1 = (2x - 1)^2 \text{ signifie}$$

$$4x^2 - 1 = 4x^2 - 4x + 1 \text{ signifie } 4x = 2$$

$$\text{Signifie } x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \in \left[ \frac{1}{2}, +\infty \right[ ; S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

$$\text{b) } \sqrt{4x^2 - 1} \leq 2x - 1$$

$$\text{Condition : } x \in \left[ \frac{1}{2}, +\infty \right[.$$

Résolution :

$$\sqrt{4x^2 - 1} \leq 2x - 1 \text{ signifie } 4x^2 - 1 \leq (2x - 1)^2 \text{ signifie}$$

$$4x^2 - 1 \leq 4x^2 - 4x + 1 \text{ signifie } 4x \leq 2$$

$$\text{signifie } x \leq \frac{1}{2} \text{ signifie } x \in \left] -\infty, \frac{1}{2} \right]. \text{ Ainsi}$$

$$x \in \left] -\infty, \frac{1}{2} \right] \cap \left[ \frac{1}{2}, +\infty \right[ = \left\{ \frac{1}{2} \right\} ; S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

#### 7 APPLIQUER

$$* x - \sqrt{2x + 3} \leq 6 \text{ signifie } \sqrt{2x + 3} \geq x - 6$$

$$\text{Condition : } 2x + 3 \geq 0 \text{ signifie } x \geq -\frac{3}{2} \text{ signifie}$$

$$x \in \left[ -\frac{3}{2}, +\infty \right[.$$

Résolution :

1er cas : si  $x - 6 \leq 0$  c'est à dire  $x \leq 6$  signifie

$$x \in \left[ -\frac{3}{2}, 6 \right], \text{ on a : l'inégalité } \sqrt{2x + 3} \geq x - 6$$

$$\text{est toujours vraie donc } S_1 = \left[ -\frac{3}{2}, 6 \right].$$

2ème cas : Si  $x - 6 \geq 0$  c'est à dire  $x \geq 6$

$$\text{signifie } x \in [6, +\infty[.$$

$$\sqrt{2x + 3} \geq x - 6 \text{ signifie } 2x + 3 \geq (x - 6)^2 \text{ signifie}$$

$$2x + 3 \geq x^2 - 12x + 36 \text{ signifie } x^2 - 14x + 33 \leq 0$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-7)^2 - 33 = 49 - 33 = 16 = 4^2$$

$$x' = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{7 - 4}{1} = 3 \text{ et } x'' = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{7 + 4}{1} = 11$$



$x$	$-\infty$	3	11	$+\infty$		
$x^2 - 14x + 33$		+	0	-	0	+

Ainsi  $x \in [3, 11] \cap [6, +\infty[ = [6, 11]$  ;  $S_2 = [6, 11]$ .

$$S_{\mathbb{R}} = S_1 \cup S_2 = \left[-\frac{3}{2}, 6\right] \cup [6, 11] = \left[-\frac{3}{2}, 11\right].$$

$$* \sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} \geq 0 \text{ signifie } \sqrt{2x+3} \geq \sqrt{x-2}$$

$$\text{Condition : } \begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \text{ signifie } \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x \geq 2 \end{cases} \text{ signifie}$$

$$x \in [2, +\infty[.$$

Résolution :

$$\sqrt{2x+3} \geq \sqrt{x-2} \text{ signifie } 2x+3 \geq x-2 \text{ signifie}$$

$$x \geq -5 \text{ signifie } x \in [-5, +\infty[$$

$$S_{\mathbb{R}} = [2, +\infty[ \cap [-5, +\infty[ = [2, +\infty[.$$

## 8 APPLIQUER

$$* \frac{x+5}{2x-3} \leq 7$$

$$\text{Condition : } 2x-3 \neq 0 \text{ signifie } x \neq \frac{3}{2} \text{ signifie}$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}.$$

$$\text{Résolution : } \frac{x+5}{2x-3} \leq 7 \text{ signifie } \frac{x+5}{2x-3} - 7 \leq 0 \text{ signifie}$$

$$\frac{x+5-7(2x-3)}{2x-3} \leq 0 \text{ signifie } \frac{-13x+26}{2x-3} \leq 0$$

$x$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$		
$-13x+26$		+	+	0	-	
$2x-3$		-	0	+	+	
$\frac{-13x+26}{2x-3}$		-		+	0	-

$$S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty, \frac{3}{2}\right[ \cup [2, +\infty[.$$

$$* \frac{6x+1}{2x-3} \geq \frac{3x-2}{x+1}$$

$$\text{Condition : } \begin{cases} 2x-3 \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \text{ signifie } x \neq \frac{3}{2} \text{ et } x \neq -1$$

$$\text{signifie } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{3}{2}\right\}.$$

Résolution :

$$\frac{6x+1}{2x-3} \geq \frac{3x-2}{x+1} \text{ signifie } \frac{6x+1}{2x-3} - \frac{3x-2}{x+1} \geq 0 \text{ signifie}$$

$$\frac{(6x+1)(x+1) - (3x-2)(2x-3)}{(2x-3)(x+1)} \geq 0$$

$$\text{Signifie } \frac{6x^2+7x+1 - (6x^2-13x+6)}{(2x-3)(x+1)} \geq 0 \text{ signifie}$$

$$\frac{6x^2+7x+1-6x^2+13x-6}{(2x-3)(x+1)} \geq 0$$

$$\text{Signifie } \frac{20x-5}{(2x-3)(x+1)} \geq 0$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$			
$20x-5$		-	-	0	+	+		
$2x-3$		-	-	-	0	+		
$x+1$		-	0	+	+	+		
$\frac{20x-5}{(2x-3)(x+1)}$		-		+	0	-		+

$$S_{\mathbb{R}} = \left]-1, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[.$$

## 9 S'ENTRAÎNER

$$* x \leq x \left(x - \frac{1}{2}\right) \text{ signifie } x - x \left(x - \frac{1}{2}\right) \leq 0 \text{ signifie}$$

$$x \left(1 - x + \frac{1}{2}\right) \leq 0 \text{ signifie } x \left(\frac{3}{2} - x\right) \leq 0$$



$x$	$-\infty$	$0$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$x$		$-$	$0$	$+$
$\frac{3}{2}-x$		$+$	$+$	$0$
$x\left(\frac{3}{2}-x\right)$		$-$	$0$	$+$

$$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty, 0] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[.$$

\*  $x(1-2x) \geq 4x-2$  signifie  $-2x^2+x \geq 4x-2$   
signifie  $-2x^2-3x+2 \geq 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times (-2) \times 2 = 9 + 16 = 25$$

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-5}{-4} = \frac{1}{2} \text{ et } x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+5}{-4} = -2$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-2x^2-3x+2$		$-$	$0$	$+$

$$S_{\mathbb{R}} = \left[-2, \frac{1}{2}\right]$$

\* Utiliser de même un tableau de signes pour les autres.

### 10 S'ENTRAINER

On pose  $AM = x$  où  $x \in [0, 8]$ .

Soit  $A_1$  l'aire du triangle AMB et  $A_2$  l'aire du trapèze BCDM

$$A_1 = \frac{AB \times AM}{2} = \frac{8x}{2} = 4x.$$

$$A_2 = \frac{(BC + DM) \times CD}{2} = \frac{(8 + 8 - x) \times 8}{2} = 4(16 - x).$$

$$A_1 = \frac{1}{4} A_2 \Leftrightarrow 4x = \frac{4(16 - x)}{4} \Leftrightarrow 4x = 16 - x$$

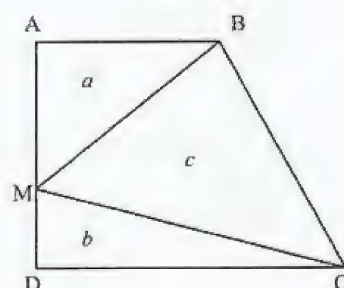
$$\Leftrightarrow 5x = 16 \Leftrightarrow x = \frac{16}{5} = 3.2$$

$3.2 \in [0, 8]$  donc pour que l'aire du triangle AMB soit le quart de l'aire du trapèze BCDM il faut que  $AM = 3,2$  cm

### 11 S'ENTRAINER

$$a = \frac{6x}{2} = 3x ; b = \frac{10(8-x)}{2} = 5(8-x)$$

$$c = \text{Aire}(ABCD) - (a+b) = \frac{8(6+10)}{2} - [3x + 5(8-x)]$$



D'où  $c = 24 + 2x$ .

1.  $a = b$  signifie  $3x = 40 - 5x$  signifie  $x = 5$  ( $x \in [0, 8]$ )

2.  $c = a + b$  signifie  $24 + 2x = 3x + 40 - 5x$   
signifie  $x = 4$ .

3. signifie  $100 + (8-x)^2 = x^2 + 36$  (d'après Pythagore)

$$CM = MB \text{ signifie } CM^2 = MB^2$$

Signifie  $100 + 64 - 16x + x^2 = x^2 + 36$  signifie  
 $x = 8$  (dans ce cas  $M=D$ ).

4.  $MB = \sqrt{34}$  signifie  $MB^2 = 34$ .

signifie  $x^2 + 36 = 34$  signifie  $x^2 = -2$  impossible

### 11 SE PERFECTIONNER

$$(E): 3x^2 - 5x - 2 = 0.$$

1) a) (E) admet deux racines distinctes car  $a = 3$  et  $c = -2$  sont de signes contraires.

$$b) A = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{x' + x''}{x'x''} = \frac{S}{P} = \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{-b}{c} = \frac{-5}{2}.$$

$$B = (3x' + 1)(3x'' + 1) = 9x'x'' + 3(x' + x'') + 1 = 9P + 3S + 1$$

$$= 9\left(\frac{-b}{a}\right) + 3\frac{c}{a} + 1 = 9 \times \frac{5}{3} + 3 \times \left(\frac{-2}{3}\right) + 1 = 15 - 2 + 1 = 14$$

2. a) (E):  $3x^2 - 5x - 2 = 0$ .

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 + 24 = 49 = 7^2$$

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-7}{6} = \frac{-1}{3} ; x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+7}{6} = 2 ;$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{1}{3}, 2\right\}.$$

b)  $\sqrt{3x^2 - 5x - 2}$  a un sens si et seulement si  $3x^2 - 5x - 2 \geq 0$ .





$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$2$	$+\infty$		
$3x^2 - 5x - 2$		+	0	-	0	+

$$3x^2 - 5x - 2 \geq 0$$

$$\text{signifie } x \in \left] -\infty, -\frac{1}{3} \right] \cup [2, +\infty[.$$

$$c) \sqrt{3x^2 - 5x - 2} = \sqrt{6}$$

$$\text{Condition : } 3x^2 - 5x - 2 \geq 0$$

$$\text{signifie } x \in \left] -\infty, -\frac{1}{3} \right] \cup [2, +\infty[.$$

Résolution :

$$\sqrt{3x^2 - 5x - 2} = \sqrt{6}$$

$$\text{signifie } 3x^2 - 5x - 2 = 6$$

$$\text{signifie } 3x^2 - 5x - 8 = 0$$

$$(a - b + c = 0)$$

$$\text{donc } x' = -1 \text{ et } x'' = \frac{-c}{a} = \frac{8}{3}.$$

$$3) Q(x) = \frac{3x^3 + 4x^2 - 17x - 6}{3x^2 - 2x - 1}.$$

a)  $Q(x)$  a un sens si et seulement si

$$3x^2 - 2x - 1 \neq 0 \text{ signifie } x \neq 1 \text{ et}$$

$$x \neq \frac{c}{a} \text{ c'est à dire } x \neq \frac{-1}{3}$$

$$\text{Ainsi } Q(x) \text{ a un sens si et seulement si } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{3}, 1 \right\}$$

$$b) (3x^2 - 5x - 2)(x + 3) =$$

$$3x^3 + 9x^2 - 5x^2 - 15x - 2x - 6 = 3x^3 + 4x^2 - 17x - 6$$

$$Q(x) = \frac{3x^3 + 4x^2 - 17x - 6}{3x^2 - 2x - 1} = \frac{(3x^2 - 5x - 2)(x + 3)}{3x^2 - 2x - 1}$$

$$\text{Or } 3x^2 - 5x - 2 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 2) = (3x + 1)(x - 2) \text{ et}$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 1) = (3x + 1)(x - 1)$$

$$\text{Donc } Q(x) = \frac{(3x + 1)(x - 2)(x + 3)}{(3x + 1)(x - 1)} = \frac{(x - 2)(x + 3)}{x - 1}$$

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{3}, 1 \right\}.$$

$$c) Q(x) \geq 0 \text{ signifie } \frac{(x - 2)(x + 3)}{x - 1} \geq 0 \text{ et}$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{3}, 1 \right\}.$$

$x$	$-\infty$	$-3$	$1$	$2$	$+\infty$	
$x-2$	-	-	-	0	+	
$x+3$	-	0	+	+	+	
$x-1$	-	-	0	+	+	
$Q(x)$	-	0	+	+	0	-

$$x \in [-3, 1[ \cup ]1, 2] \setminus \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$$

$$\text{donc } S_{\mathbb{R}} = \left[ -3, -\frac{1}{3} \right[ \cup \left] -\frac{1}{3}, 1 \right[ \cup ]1, 2] ]$$



12

## SE PERFECTIONNER

$$(E): x^2 + x - 20 = 0.$$

1)  $a = 1$  et  $c = -20$  sont de signes contraires donc (E) admet deux racines distinctes  $x'$  et  $x''$ .

$$2) \text{ Sachant que } x' + x'' = -\frac{b}{a} = -1 \text{ et } x'x'' = \frac{c}{a} = -20,$$

$$\text{on a : } A = \frac{4}{x'} + \frac{4}{x''} = \frac{4(x' + x'')}{x'x''} = \frac{-4}{-20} = \frac{1}{5}$$

$$\text{Et } B = x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = 1 + 40 = 41.$$

$$3) a) (E): x^2 + x - 20 = 0$$

$$\Delta = 1 + 80 = 81$$

$$\text{donc } x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 9}{2} = -5 \text{ et } x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 9}{2} = 4.$$

$$b) \text{ Soit l'équation } \left(x - \frac{5}{x}\right)^2 + \left(x - \frac{5}{x}\right) - 20 = 0.$$

Effectuons le changement de variables suivant :

$$t = x - \frac{5}{x}, \text{ l'équation devient } t^2 + t - 20 = 0$$

$$\text{signifie } t = -5 \text{ ou } t = 4$$

$$* x - \frac{5}{x} = -5 \text{ signifie } x^2 - 5 = -5x \text{ signifie } x^2 + 5x - 5 = 0,$$

$$\Delta = 25 + 20 = 45$$

$$\text{donc } x' = \frac{-5 - \sqrt{45}}{2} = \frac{-5 - 3\sqrt{5}}{2} \text{ et } x'' = \frac{-5 + \sqrt{45}}{2} = \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{2}.$$

$$* x - \frac{5}{x} = 4 \text{ signifie } x^2 - 5 = 4x \text{ signifie } x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(a - b + c = 0)$$

$$\text{donc } x' = -1 \text{ et } x'' = -\frac{c}{a} = 5.$$

$$\text{D'où } S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{-5 - 3\sqrt{5}}{2}, \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{2}, -1, 5 \right\}.$$

$$4) a) (-x - 1)(x^2 + x - 20) = -x^3 - x^2 + 20x - x^2 - x + 20 = -x^3 - 2x^2 + 19x + 20$$





$$b) -x^3 - 2x^2 + 19x + 20 > 0$$

$$\text{signifie } (-x-1)(x^2+x-20) > 0$$

$x$	$-\infty$	$-5$	$-1$	$4$	$+\infty$			
$-x-1$		+	+	0	-			
$x^2+x-20$		+	0	-	0	+		
$P(x)$		+	0	-	0	+	0	-

$$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty, -5[ \cup ]-1, 4[.$$

$$5) Q(x) = \frac{-x^3 - 2x^2 + 19x + 20}{2x^2 + 12x + 10}.$$

a)  $Q(x)$  est définie si et seulement si

$$2x^2 + 12x + 10 \neq 0$$

$$\text{signifie } x^2 + 6x + 5 \neq 0$$

$$\text{signifie } x \neq -1 \text{ et } x \neq -5$$

$$\text{signifie } x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -1\}.$$

b)

$$|Q(x)| - Q(x) = 0$$

$$\text{signifie } |Q(x)| = Q(x)$$

$$\text{signifie } Q(x) \geq 0$$

$$\text{Or } Q(x) = \frac{(-x-1)(x^2+x-20)}{2(x+1)(x+5)}$$

$$= -\frac{(x+1)(x+5)(x-4)}{2(x+1)(x+5)} = -\frac{1}{2}(x-4)$$

pour tout réel

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -1\}.$$

$$Q(x) \geq 0 \text{ signifie } \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-4) \geq 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -1\} \end{cases}$$

$$\text{signifie } \begin{cases} x \leq 4 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -1\} \end{cases}$$

$$\text{signifie } S_{\mathbb{R}} = ]-\infty, -5[ \cup ]-5, -1[ \cup ]-1, 4[.$$



### SE PERFECTIONNER

1.  $x$  et  $y$  sont les racines de l'équation

$$x^2 - 3x + 2 = 0 ; a + b + c = 0 \text{ donc } x = 1 \text{ ou } x = 2.$$

$$(x, y) = (1, 2) \text{ ou } (2, 1).$$

$$2. A(x) \geq 0 \text{ signifie } x^2 - 3x + 2 \geq 0.$$

$x$	$-\infty$	$1$	$2$	$+\infty$		
$x^2 - 3x + 2$		+	0	-	0	+

$$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[.$$

3. a)  $B(x)$  est définie si et seulement si

$$x^2 - 3x + 2 \neq 0 \text{ signifie } x \neq 1 \text{ et } x \neq 2 \text{ signifie}$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}.$$

$$b) B(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x+2}{x-1}$$

pour tout réel  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}.$

c) \*

$$B(x) = 0 \text{ signifie } \begin{cases} \frac{x+2}{x-1} = 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \end{cases} \text{ signifie } x = -2.$$

\*

$$B(x) \geq x \text{ signifie } \begin{cases} \frac{x+2}{x-1} \geq x \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \end{cases} \text{ signifie } \begin{cases} \frac{x+2}{x-1} - x \geq 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \end{cases}$$

$$\text{signifie } \begin{cases} \frac{x+2-x^2+x}{x-1} \geq 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \end{cases} \text{ signifie } \begin{cases} \frac{-x^2+2x+2}{x-1} \geq 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \end{cases}$$

$x$	$-\infty$	$\sqrt{3}-1$	$1$	$2$	$\sqrt{3}+1$	$+\infty$		
$-x^2+2x+2$	-	0	+	+	+	0	-	
$x-1$	-		-	0	+	+	+	
$\frac{-x^2+2x+2}{x-1}$	+	0	-		+	+	0	-

$$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty, \sqrt{3}-1[ \cup ]1, 2[ \cup ]2, \sqrt{3}+1[$$



**14 SE PERFECTIONNER**

a) Soit  $S_1$  l'aire du carré AEGF, on a :  $S_1 = AE^2 = x^2$ .

Soit  $S_2$  l'aire du carré GHCI, on a :  $S_2 = GH^2 = (10-x)^2$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } S(x) &= S_1 + S_2 = x^2 + (10-x)^2 \\ &= x^2 + x^2 - 20x + 100 = 2x^2 - 20x + 100. \end{aligned}$$

c)  $S(x)$  est la moitié de l'aire du carré ABCD signifie

$$S(x) = \frac{AB^2}{2}$$

Signifie  $S(x) = 50$  signifie  $2x^2 - 20x + 100 = 50$

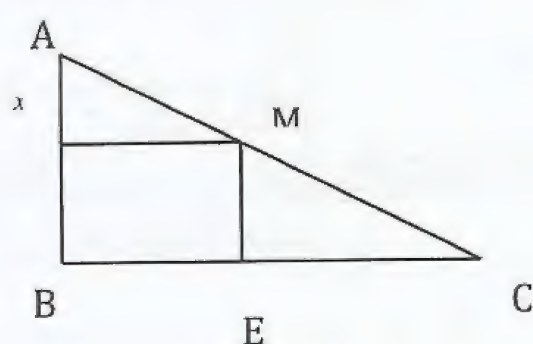
signifie  $2x^2 - 20x + 50 = 0$

Signifie  $x^2 - 10x + 25 = 0$  signifie  $(x-5)^2 = 0$  signifie

$$x = 5 \in [0, 10].$$

**15 SE PERFECTIONNER**

1. Soit  $S(x)$  l'aire du rectangle FMEB.



D'après l'énoncé de Thalès on a :

$$\frac{AF}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{FM}{BC} \text{ signifie } \frac{x}{4} = \frac{FM}{8}$$

signifie  $FM = 2x$ .

$$S(x) = FM \times FB = 2x(4-x) = -2x^2 + 8x.$$

2. a) Soit  $S_{\max}$  la valeur maximale de  $S(x)$  alors

$$S(x) \leq S_{\max} \text{ pour tout } x \in [0, 4].$$

Signifie  $-2x^2 + 8x - S_{\max} \leq 0$  pour tout  $x \in [0, 4]$

(un trinôme qui a le signe de  $a$  et qui peut être nul pour tout  $x$ )

Signifie  $\Delta' = 0$  signifie  $4^2 - (-2)(-S_{\max}) = 0$  signifie

$$S_{\max} = 8$$

b)  $S(x)$  atteint sa valeur maximale signifie  $\Delta' = 0$

$$\text{signifie } x = \frac{-b'}{a} = \frac{-4}{-2} = 2 \text{ signifie } F = A * B.$$





## Notion de polynômes

### I) Résumé de cours

#### A) Fonctions Polynômes, Fonctions Rationnelles:

Soient  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  et  $a_n$  sont des réels tels que  $a_n$  soit non nul.

- La fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , s'appelle une fonction polynôme de degré  $n$  et de coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  et  $a_n$ .
  - On dit également  $f$  est un polynôme de degré  $n$  et on note  $d^\circ(f) = n$ .
  - Soit  $\alpha$  un réel, on a  $(\alpha f)$  est un polynôme défini par :

$$(\alpha f)(x) = (\alpha a_n) x^n + (\alpha a_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (\alpha a_1) x + \alpha a_0.$$

- Deux polynômes sont égaux lorsqu'ils ont le même degré et leurs coefficients des termes (monômes) de même degré sont égaux.
- La somme, le produit, de deux polynômes est un polynôme.
- **Le quotient** de deux fonctions polynômes s'appelle une **fonction rationnelle**.
- Soit  $P$  et  $Q$  deux polynôme tel que  $\deg(P) = n$  et  $\deg(Q) = m$ .
- Si  $n = m$  alors  $\deg(P + Q) = n$ .
- Si  $n < m$  alors  $\deg(P + Q) = m$ .
- $\deg(P \times Q) = n + m$ .

#### B) Racine d'un polynôme - Factorisation d'un polynôme :

Soit  $P$  un polynôme de degré  $n$  supérieur à 1.

- On dit qu'un réel  $\alpha$  est une racine du polynôme  $P$  lorsque  $P(\alpha) = 0$ .
- Si  $\alpha$  est une racine de  $P$  alors il existe un polynôme  $Q$  de degré  $(n-1)$  tel que pour tout réel  $x$  on a  $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ ; ( $n \geq 1$ ).
- Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux racines de  $P$  alors il existe un polynôme  $Q$  de degré  $(n-2)$  tel que pour tout réel  $x$  on a  $P(x) = (x - \alpha)(x - \beta)Q(x)$ ; ( $n \geq 2$ ).
- Plus généralement, si  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  sont  $k$  racines de  $P$  alors il existe un polynôme  $Q$  de degré  $(n-k)$  tel que pour tout réel  $x$  on a :
$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_k)Q(x); \quad (n \geq k).$$



II) Exercices :

1 VRAI-FAUX ; Q-C-M

- I. Soit le polynôme  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .
- 1) Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse
- \*  $(a - b + c - d = 0)$  signifie  $(-1 \text{ est un zéro de } f)$ .
  - \*  $(a + b + c + d = 0)$  signifie  $(1 \text{ est un zéro de } f)$ .
- 2) Relier par une flèche chaque ligne de la colonne A avec qui lui correspond dans B.

A	B
Si a et b sont opposés et c et d sont opposés, alors	1 est un zéro de f -1 est un zéro de f
Si a et c sont opposés et b et d sont opposés, alors	
Si a et d sont opposés et b et c sont opposés, alors	

II. Trouver la bonne réponse dans chacun des cas suivants :

- a) La fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \frac{x^4 - 16}{x^2 + 4}$  est :
- \* Une fonction polynôme de degré 2.
  - \* Une fonction polynôme de degré 4.
  - \* N'est pas une fonction polynôme.
- b) La fonction  $h(x) = a_2x^2 + a_1x + 3$  est une fonction polynôme nulle lorsque :
- \*  $a_2 = a_1 = 0$
  - \*  $a_2 = a_1 = -3$
  - \* Ne peut pas être identiquement nulle.
- c) Une fonction constante non nulle est une fonction polynôme de degré égal à :
- \* 1.
  - \* 0.
  - \* N'a pas de degré.
- d) Soit  $P$  un polynôme de degré  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ , le degré du polynôme  $\alpha \cdot P$  est :
- \*  $n$ .
  - \* 0.
  - \*  $\alpha n$ .

2 APPLIQUER

- On considère la fonction  $P$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $P(x) = (x^2 + 1)^2 - (4x + 2)^2$ .
- Montrer que  $P$  est une fonction polynôme dont on précisera le degré.
  - Résoudre l'équation  $P(x) = 0$ .

3 APPLIQUER

On considère la fonction polynôme  $P$  définie par  $P(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + k$ , où  $k$  est un nombre réel.



1. Déterminer la valeur de  $k$  pour que  $x = 4$  soit une racine de  $P$ .
2. Pour la valeur de  $k$  obtenue à la question 1. Résoudre l'inéquation  $P(x) < 0$ .

#### 4 S'ENTRAINER

Soit l'expression  $f(x) = (x + \sqrt{1+x^2})^3 + (x - \sqrt{1+x^2})^3$ .

- 1) Montrer que  $f$  est une fonction polynôme dont on précisera le degré.
- 2) Résoudre l'inéquation  $f(x) \geq 0$ .

#### 5 S'ENTRAINER

Déterminer une fonction polynôme  $P$  de degré 3 admettant 1, -3 et -4 pour racines et telle que  $P(2) = 90$ .

#### 6 SEPERFECTIONNER

- 1) Soit  $P(x) = x^2 - 2x - 8$ 
  - a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $P(x) = 0$
  - b) Factoriser  $P(x)$
- 2) Soit  $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 6x + 8$ 
  - a) Vérifier que 1 est une racine de l'équation  $Q(x) = 0$
  - b) Montrer que  $Q(x) = (x-1)P(x)$
  - c) Acheter alors la résolution dans  $\mathbb{R}$  de l'équation  $Q(x) = 0$
  - d) Donner le tableau de signe  $Q(x)$
  - e) Sans les calculer, comparer  $Q(1)$ ,  $Q(2)$  et  $Q(-1)$
  - f) Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $|Q(x)| + Q(x) = 0$
- 3) Soit  $T(x) = x^6 - 2x^4 - 6x^2 + 8$ 
  - a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $T(x) = 0$
  - b) Factoriser  $T(x)$
- 4) Soit  $f(x) = \frac{T(x)}{P(x)}$ 
  - a) Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
  - b) Simplifier  $f(x)$
  - c) Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'inéquation  $f(x) \geq 0$

#### 7 SEPERFECTIONNER

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  le système 
$$\begin{cases} x+y = 13 \\ xy = 36 \end{cases}$$



- 2) En déduire une factorisation du polynôme  $R(x) = x^2 - 13x + 36$
- 3) Soit  $P(x) = x^4 - 13x^2 + 36$ . En s'inspirant de la deuxième question, factoriser  $P(x)$  sous forme de deux polynômes de second degré.
- 4) Soient  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  et  $\alpha_4$  les racines de  $P$ , sans les calculer déterminer en justifiant leur produit.
- 5) Résoudre  $P(x) = 0$ .
- 6) En déduire la résolution du système 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 97 \\ xy = 36 \end{cases}$$
- 7) Soit  $Q(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ .  
Chercher une racine évidente de  $Q$
- 8) Factoriser  $Q(x)$ .
- 9) Étudier le signe de  $Q(x)$ .
- 10) En déduire la résolution de l'inéquation  $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ .

8

### SEPERFECTIONNER

- 1) Soit  $P(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$ .
  - a) Calculer  $P(2)$ .
  - b) En déduire une factorisation de  $P(x)$  ; puis résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $P(x) = 0$ .
- 2) Soit  $Q(x) = x^4 - 9x^3 + 28x^2 - 36x + 16$ .
  - a) Vérifier que 1 et 2 sont deux racines du polynôme  $Q$ .
  - b) Écrire  $Q(x)$  sous forme d'un produit de deux polynômes de degré 2.
- 3) On pose  $f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ .
  - a) Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
  - b) Montrer que pour tout réel  $x \in D$ , on a :  $f(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{x+2}$ .
  - c) Résoudre l'inéquation  $f(x) \geq 0$ .

9

### SEPERFECTIONNER

Soit  $P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

- 1) Vérifier que 3 est une racine de l'équation :  $P(x) = 0$
- 2) Trouver les réels  $a, b$  et  $c$  pour que  $P = (x-3)(ax^2 + bx + c)$ .
- 3) Résoudre alors l'équation :  $P(x) = 0$ .
- 4) En déduire la résolution dans  $\mathbb{R}$  de l'équation :  $x^6 - 5x^4 - 2x^2 + 24 = 0$ .



5) Soit  $Q(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 8x + 32$ .

a) Factoriser  $Q$  sachant qu'il admet deux racines opposées.

b) Soit  $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ . Déterminer l'ensemble de définition de  $R(x)$  puis résoudre

l'inéquation  $R(x) \geq 0$





### VRAI-FAUX; Q-C-M

I.

1) \*)  $(a-b+c-d=0)$  signifie  $(-1 \text{ est un zéro de } f)$ . Vrai  
En effet :  $(a-b+c-d=0)$  signifie  $(-a+b-c+d=0)$

Signifie  $a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d = 0$

Signifie  $f(-1) = 0$ .

Signifie  $(-1 \text{ est un zéro de } f)$ .

\*)  $(a+b+c+d=0)$  Signifie  $(1 \text{ est un zéro de } f)$ . Vraie

En effet :  $(a+b+c+d=0)$  Signifie  $a \times 1^3 + b \times 1^2 + c \times 1 + d = 0$

Signifie  $f(1) = 0$ .

Signifie  $(1 \text{ est un zéro de } f)$ .

2)

A	B
Si a et b sont opposés et c et d sont opposés, alors	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="text-align: center;"> <p>1 est un zéro de f</p> <p>-1 est un zéro de f</p> </div> </div>
Si a et c sont opposés et b et d sont opposés, alors	
Si a et d sont opposés et b et c sont opposés, alors	

II.

a)  $g(x) = \frac{x^4 - 16}{x^2 + 4} = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x^2 + 4} = x^2 - 4$  pour tout

réel  $x$ , donc  $g$  est une fonction polynôme de degré 2.

b)  $h(x) = a_2 x^2 + a_1 x + 3$  ne peut pas être nulle car ses coefficients ne sont pas tous nuls.

c) Une fonction constante non nulle est une fonction polynôme de degré égal à 0.

d) Soit  $P$  un polynôme de degré  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ , le degré du polynôme  $\alpha \cdot P$  est  $n$ .



### APPLIQUER

1)  $P(x) = (x^2 + 1)^2 - (4x + 2)^2$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 - 16x^2 - 16x - 4 = x^4 - 14x^2 - 16x - 3$$

Donc  $P$  est une fonction polynôme de degré 4.

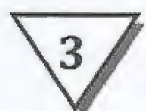
2)  $P(x) = 0$  signifie  $(x^2 + 1)^2 - (4x + 2)^2 = 0$

Signifie  $(x^2 + 1 - 4x - 2)(x^2 + 1 + 4x + 2) = 0$

Signifie  $(x^2 - 4x - 1)(x^2 + 4x + 3) = 0$

Signifie  $x^2 - 4x - 1 = 0$  ou  $x^2 + 4x + 3 = 0$

$$S_{\mathbb{R}} = \{2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}, -1, -3\}.$$



### APPLIQUER

1)  $x = 4$  soit une racine de  $P$  signifie  $P(4) = 0$   
signifie  $-64 + 96 - 36 + k = 0$

Signifie  $-4 + k = 0$  signifie  $k = 4$ .

2) Soit  $P(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$ .

Pour résoudre l'inéquation  $P(x) < 0$ , factorisons  $P(x)$ .

En effet :

$$P(x) = (x - 4)(ax^2 + bx + c)$$

$$= ax^3 + (b - 4a)x^2 + (c - 4b)x - 4c$$

$$= -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} a = -1 \\ b - 4a = 6 \\ c - 4b = -9 \\ -4c = 4 \end{cases} \text{ signifie } \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

d'où  $P(x) = (x - 4)(-x^2 + 2x - 1)$ .

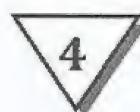
On remarque que

$$-x^2 + 2x - 1 = -(x^2 - 2x + 1) = -(x - 1)^2, \text{ ainsi}$$

$$P(x) = -(x - 4)(x - 1)^2.$$

$P(x) < 0$  signifie  $-(x - 4)(x - 1)^2 < 0$  signifie

$$(4 - x)(x - 1)^2 < 0 \text{ signifie } x \in ]4, +\infty[.$$



### S'ENTRAINER

$$1) f(x) = (x + \sqrt{1 + x^2})^3 + (x - \sqrt{1 + x^2})^3$$

En utilisant les identités remarquables :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ et}$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

on obtient :

$$f(x) = x^3 + 3x^2\sqrt{1 + x^2} + 3x(\sqrt{1 + x^2})^2 + (\sqrt{1 + x^2})^3$$

$$+ x^3 - 3x^2\sqrt{1 + x^2} + 3x(\sqrt{1 + x^2})^2 - (\sqrt{1 + x^2})^3$$

$$= 2x^3 + 6x(1 + x^2) = 8x^3 + 6x$$

Donc  $f$  est une fonction polynôme de degré égal à 3.

2)  $f(x) \geq 0$  signifie  $8x^3 + 6x \geq 0$

signifie  $2x(4x^2 + 3) \geq 0$

signifie  $x \geq 0$  car  $2(4x^2 + 3) > 0$

$$S_{\mathbb{R}} = [0, +\infty[.$$



### S'ENTRAINER

Soit  $P$  une fonction polynôme de degré 3 admettant 1, -3 et -4 pour racines

On a :

$$P(x) = a(x - 1)(x + 3)(x + 4) = ax^3 + 6ax^2 + 5ax - 12a$$



Or  $P(2) = 90$  signifie  
 $8a + 24a + 10a - 12a = 90$   
 signifie  $30a = 90$   
 signifie  $a = 3$   
 Ainsi  $P(x) = 3x^3 + 18x^2 + 15x - 36$ .

## 6 SE PERFECTIONNER

1)  $P(x) = x^2 - 2x - 8$

a)  $P(x) = 0$

$\Delta' = (-1)^2 - (-8) = 9 > 0 \Rightarrow x' = \frac{1 - \sqrt{9}}{1} = -2$  et

$x'' = \frac{1 + \sqrt{9}}{1} = 4 \Rightarrow S_{\mathbb{R}} = \{-2, 4\}$ .

b)  $P(x) = (x - x')(x - x'') = (x + 2)(x - 4)$ .

2)  $Q(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ .

a)  $Q(1) = 1^3 - 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 8 = 0$

b)  $(x - 1)P(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 8) = Q(x)$ .

c)  $Q(x) = 0$  signifie  $(x - 1)P(x) = 0$   
 signifie  $x - 1 = 0$  ou  $P(x) = 0$   
 signifie  $x = 1$  ou  $x = -2$  ou  $x = 4$ .

d)

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$4$	$+\infty$
$x - 1$	-	-	+	+	
$P(x)$	+	-	-	+	
$Q(x)$	-	+	-	+	

e) D'après le tableau de signe de  $Q(x)$ , on a:  $Q(-1) > 0 = Q(1) > Q(2)$ .

f)  $|Q(x)| + Q(x) = 0$

\*) Si  $x \in ]-\infty, -2] \cup [1, 4]$  alors  $Q(x) \leq 0$ ,  
 l'équation devient  $-Q(x) + Q(x) = 0$  toujours vraie  
 donc  $S_1 = ]-\infty, -2] \cup [1, 4]$ .

\*) Si  $x \in [-2, 1] \cup [4, +\infty[$  alors  $Q(x) \geq 0$ ,  
 l'équation devient  $Q(x) + Q(x) = 0$  signifie  
 $2Q(x) = 0$  signifie  $Q(x) = 0$  signifie  $x = -2$  ou  $x = 1$   
 ou  $x = 4$  donc  $S_2 = \{-2, 1, 4\}$ .

$S_{\mathbb{R}} = S_1 \cup S_2 = ]-\infty, -2] \cup [1, 4]$ .

3) a)  $T(x) = x^6 - 3x^4 - 6x^2 + 8$

$T(x) = Q(x^2)$ .

$T(x) = 0$  signifie  $Q(x^2) = 0$  signifie  $x^2 = -2$   
 impossible ou  $x^2 = 1$  ou  $x^2 = 4$

Signifie  $x = -1$  ou  $x = 1$  ou  $x = -2$  ou  $x = 2$ .

$S_{\mathbb{R}} = \{-2, -1, 1, 2\}$ .

b)  $T(x) = (x^2 + 2)(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)$ .

4)  $f(x) = \frac{T(x)}{P(x)}$

a)  $x \in D_f$  signifie  $P(x) \neq 0$  signifie  $x \neq -2$  et  
 $x \neq 4$  signifie  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$ .

b)  $f(x) = \frac{T(x)}{P(x)} = \frac{(x^2 + 2)(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)(x - 4)}$   
 $= \frac{(x^2 + 2)(x + 1)(x - 1)(x - 2)}{x - 4}$

pour tout réel  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$ .

c)  $f(x) \geq 0$  signifie  $\frac{(x^2 + 2)(x + 1)(x - 1)(x - 2)}{x - 4} \geq 0$

signifie  $\frac{(x + 1)(x - 1)(x - 2)}{x - 4} \geq 0$

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$1$	$2$	$4$	$+\infty$
$x^2 - 1$		+		-	+	+	+
$x - 2$		-		-	-	+	+
$x - 4$		-		-	-	-	+
$f(x)$	+		+	-	+	-	+

$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty, -2[ \cup ]-2, -1] \cup [1, 2] \cup ]4, +\infty[$ .

## 7 SE PERFECTIONNER

1)  $\begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 36 \end{cases}$

$x$  et  $y$  si elles existent sont les racines de l'équation  
 $x^2 - 13x + 36 = 0$ .

$\Delta = 13^2 - 4 \times 36 = 25 \Rightarrow (x, y) = (4, 9)$  ou  $(9, 4)$ .

2)  $R(x) = x^2 - 13x + 36 = (x - 4)(x - 9)$ .

3)  $P(x) = x^4 - 13x^2 + 36$ ;  $P(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$ .

4)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  et  $\alpha_4$  sont les racines de  $P$  par

conséquent,  $P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)$

$= x^4 - 13x^2 + 36$

Le produit des racines est le coefficient constant du  
 polynôme c'est donc 36.

5.  $P(x) = 0$  signifie  $x^2 = 4$  ou  $x^2 = 9$  signifie  $x = -2$  ou  
 $x = 2$  ou  $x = -3$  ou  $x = 3$

6.  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 97 \\ xy = 36 \end{cases}$

Signifie  $\begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = 97 \\ xy = 36 \end{cases}$



Signifie  $\begin{cases} (x+y)^2 = 97 + 72 = 169 \\ xy = 36 \end{cases}$

Signifie  $\begin{cases} x+y = 13 \\ xy = 36 \end{cases}$

Ou  $\begin{cases} x+y = -13 \\ xy = 36 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 13 \\ \alpha\beta = 36 \end{cases}$  avec  $\alpha = -x$  et  $\beta = -y$

D'où  $(x,y) = (4,9)$  ou  $(9,4)$  ou  $(-4,-9)$  ou  $(-9,-4)$ .

7)  $Q(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ .

$Q(1) = 0$

8)  $Q(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$

Par identification on trouve  $a = 1$ ,  $b = 0$  et  $c = -4$

C'est-à-dire  $Q(x) = (x-1)(x^2-4)$

9)

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$2$	$+\infty$
$x-1$	-	-	+	+	+
$x^2-4$	+	-	-	+	+
$Q(x)$	-	+	-	+	+

10)

$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$1$	$2$	$3$	$+$
$x^2-9$	+	-	-	-	-	+	+
$x^2-4$	+	+	-	-	+	+	+
$P(x)$	+	-	+	+	-	+	+
$Q(x)$	-	-	+	-	+	+	+
$\frac{P(x)}{Q(x)}$	-	+	+	-	-	+	+

$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty, -3] \cup ]1, 2[ \cup ]2, 3[$ .

8

## SE PERFECTIONNER

1.  $P(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$

a)  $P(2) = 8 - 16 - 8 + 16 = 0$  donc 2 est une racine du polynôme P.

b) Factorisation de P :

$P(x) = (x-2)(ax^2+bx+c)$ , où  $a, b$  et  $c$  sont trois réels à déterminer. On peut immédiatement prendre  $a=1$  car le coefficient du monôme du plus

haut degré est égal à 1. En développant le produit précédent on obtient :

$P(x) = x^3 + (b-2)x^2 + (c-2b)x - 2c$

Or on sait que  $P(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$  ; par identification des deux polynômes on obtient :

$\begin{cases} b-2 = -4 \\ c-2b = -4 \\ -2c = 16 \end{cases}$  signifie  $\begin{cases} b = -2 \\ c = -8 \end{cases}$ .

Ainsi on a :  $P(x) = (x-2)(x^2-2x-8)$  pour tout réel  $x$ .

Résolution de l'équation  $P(x) = 0$  :

$P(x) = 0$  signifie  $(x-2)(x^2-2x-8) = 0$  signifie

$x-2 = 0$  ou  $x^2-2x-8 = 0$

$x^2-2x-8 = 0$ ,  $\Delta' = 9$ ,  $x' = -2$  et  $x'' = 4$

$S_{\mathbb{R}} = \{-2, 2, 4\}$ .

2.  $Q(x) = x^4 - 9x^3 + 28x^2 - 36x + 16$

a)  $Q(1) = 0$  et  $Q(2) = 0$ . (à vérifier).

b)  $Q(x) = (x-1)(x-2)(x^2+bx+c)$   
 $= (x^2-3x+2)(x^2+bx+c)$ .

Vous remarquez qu'on a pris le coefficient du monôme de degré 2 égal à 1, aussi on peut prendre  $c = 8$  car on constate que le coefficient constant est égal à 16. ( $2c = 16$  donc  $c = 8$ ). Ces constatations peuvent nous bénéficier du temps.

Donc  $Q(x) = (x^2-3x+2)(x^2+bx+8)$  ; il nous reste à chercher  $b$ . On développe le produit on obtient  $Q(x) = x^4 + (b-3)x^3 + (10-3b)x^2 + (2b-24)x + 16$ .

Par identification on obtient  $b = -6$  et on aura

$Q(x) = (x^2-3x+2)(x^2-6x+8)$ .

3.  $f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ .

a) Notons  $D_f$  le domaine de définition de  $f$ .

$x \in D_f$  signifie  $P(x) \neq 0$  signifie  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 4\}$  ;

d'où  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 4\}$ .

b)  $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x^2-6x+8)}{(x-2)(x+2)(x-4)}$ , or

$x^2-6x+8 = (x-2)(x-4)$  (on cherche  $\Delta'$  puis les racines et ensuite on factorise).

Ainsi  $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-2)(x-4)}{(x-2)(x+2)(x-4)} = \frac{(x-1)(x-2)}{x+2}$

pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 4\}$ .





c)  $f(x) \geq 0$  signifie  $\frac{(x-2)(x-1)}{x+2} \geq 0$  avec

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 4\}.$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$2$	$4$	$+\infty$
$x-1$		-	-	0	+	+
$x-2$		-	-	-	0	+
$x+2$		-	0	+	+	+
$f(x)$		-	+	0	-	+

$$S_{\mathbb{R}} = ]-2, 1] \cup ]2, 4[ \cup ]4, +\infty[.$$

9

### SE PERFECTIONNER

$$P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24.$$

1)  $P(3) = 0.$

2)  $P(x) = (x-3)(ax^2 + bx + c)$

$$= ax^3 + (b-3a)x^2 + (c-3b)x - 3c =$$

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 24$$

Par identification on aura :

$$\begin{cases} a=1 \\ b-3a=-5 \\ c-3b=-2 \\ -3c=24 \end{cases} \text{ signifie } \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-8 \end{cases}$$

d'où  $P(x) = (x-3)(x^2 - 2x - 8).$

3)  $P(x) = 0$  signifie  $(x-3)(x^2 - 2x - 8) = 0$

signifie  $x-3=0$  ou  $x^2 - 2x - 8 = 0$  signifie  $x = 3$

ou  $x = -2$  ou  $x = 4$ .  $S_{\mathbb{R}} = \{-2, 3, 4\}.$

4)  $x^6 - 5x^4 - 2x^2 + 24 = 0.$

Faisons le changement de variable  $t = x^2$ ,

l'équation devient  $t^3 - 5t^2 - 2t + 24 = 0$  signifie

$P(t) = 0$  signifie  $t = 3$  ou  $t = -2$  ou  $t = 4$

$t = 3$  signifie  $x^2 = 3$  signifie  $x = -\sqrt{3}$  ou  $x = \sqrt{3}.$

$t = -2$  signifie  $x^2 = -2$  impossible.

$t = 4$  signifie  $x^2 = 4$  signifie  $x = -2$  ou  $x = 2$ . Ainsi

$$S_{\mathbb{R}} = \{-2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2\}.$$

5)  $Q(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 8x + 32.$

a)  $Q(x)$  admet deux racines opposées, par exemple  $\alpha$  et  $-\alpha$  sont deux racines de  $Q(x).$

$$Q(\alpha) = 0 \text{ signifie } \alpha^4 - 2\alpha^3 - 12\alpha^2 + 8\alpha + 32 = 0 \quad (1)$$

$$Q(-\alpha) = 0$$

$$\text{signifie } (-\alpha)^4 - 2(-\alpha)^3 - 12(-\alpha)^2 + 8(-\alpha) + 32 = 0$$

$$\text{signifie } \alpha^4 + 2\alpha^3 - 12\alpha^2 - 8\alpha + 32 = 0 \quad (2)$$

En faisons la différence des deux égalités (2) et (1) on obtient :

$$4\alpha^3 - 16\alpha = 0 \text{ signifie } 4\alpha(\alpha^2 - 4) = 0$$

$$\text{signifie } \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 2 \text{ ou } \alpha = -2$$

On vérifie que 0 n'est pas une racine de  $Q(x)$ , tan disque 2 et -2 le sont.

$$Q(x) = (x-2)(x+2)(ax^2 + bx + c)$$

$$= (x^2 - 4)(ax^2 + bx + c)$$

$$= ax^4 + bx^3 + (c - 4a)x^2 - 4bx - 4c$$





## Arithmétique

### I) Résumé du cours

#### A) Division euclidienne

##### Définition :

Soient  $a$  et  $b$  2 entiers tels que  $b \neq 0$ . Effectuer la division euclidienne de  $a$  par  $b$ , c'est trouver l'unique couple  $(q,r)$  tel que  $a = bq+r$  avec  $0 \leq r < |b|$  ;  $q$  est le quotient ;  $r$  est le reste

**Remarque :** si  $r = 0$ , on dit alors que  $b$  divise  $a$  ou  $a$  est divisible par  $b$

##### Applications

- la somme de 5 nombres consécutifs est divisible par 5
- Si  $n$  divise  $a$  et  $n$  divise  $b$  alors  $n$  divise  $a+b$  et  $n$  divise  $ab$
- Soit  $n$  un entier pair  $n^2$  est divisible par 4

Soit un entier impair,  $n^2-1$  est divisible par 8(indication : montrer d'abord que le produit de 2 entiers consécutifs est un nombre pair)

- a. Les restes possibles de la division euclidienne d'un entier naturel  $n$  par 3 sont 0 ou 1 ou 2

b. Pour tout entier naturel  $n$  on a :  $n^3 - n$  est divisible par 3

- a. Montrer que  $\frac{4n+10}{n+1} = 4 + \frac{6}{n+1}$ , en effet  $4 + \frac{6}{n+1} = \frac{4n+4+6}{n+1} = \frac{4n+10}{n+1}$

b. En déduire les entiers naturels  $n$  tel que  $\frac{4n+10}{n+1}$  soit un entier naturel

$n+1 \in D_6$  signifie que  $n+1 \in \{1, 2, 3, 6\}$  signifie que  $n \in \{0, 1, 2, 5\}$

#### B) Divisibilité par 2, 3, 4, 5, 8, 9 et 25

Compléter :

- Un entier est divisible par 3 si et seulement si .....
- Un nombre est divisible par 4 si et seulement si.....
- Un entier est divisible par 5 si et seulement si .....
- Un entier supérieur à 100 est divisible par 8 si et seulement si.....
- Un entier est divisible par 9 si et seulement si.....
- Un entier est divisible par 25 si et seulement si .....



**C) Divisibilité par 11**

$n$  étant un nombre donné et  $(a_p a_{p-1} a_{p-2} \dots a_3 a_2 a_1)$  son écriture décimale. On pose

$$d = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{p-1} a_p.$$

Un entier est divisible par 11 si et seulement si  $d$   
 $(d = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{p-1} a_p)$  est divisible par 11

**II) Exercices****1 Q-C-M**

Soit  $a, b, q, r$  et  $d$  des entiers relatifs. Valider ou infirmer les propositions suivantes.

- 1) Si  $d$  divise  $a$  et  $b$ , alors  $d$  divise  $3a + 11b$ .
- 2) Si  $d$  divise  $a$  et  $b$ ,  $d$  divise  $a - b$  et  $a + b$ .
- 3) si  $d$  divise  $a + b$ , alors  $d$  divise  $a$  et  $d$  divise  $b$ .
- 4) si  $d$  divise 2, alors  $d$  divise  $a$ .
- 5) si  $d$  divise  $a$  ou si  $d$  divise  $b$ , alors  $d$  divise  $ab$ .
- 6) si  $d$  divise  $ab$ , alors  $d$  divise  $a$  ou  $d$  divise  $b$ .
- 7) si  $d$  est un diviseur commun de  $3a + 1$  et  $5a - 1$ , alors  $d$  divise 8.
- 8) si  $d$  divise  $a$  et  $b$  et si  $a = bq + r$ , alors  $d$  divise  $r$ .

**2 VRAI-FAUX**

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant :

Si  $a$  divise  $b$  et  $c$  divise  $b$  alors  $ac$  divise  $b$ .

**3 APPLIQUER**

En utilisant la définition, démontrer que : si  $a$  divise  $b$ , alors  $a^2$  divise  $b^2$ .

**4 APPLIQUER**

Démontrer que la somme de deux nombres impairs consécutifs est divisible par 4.

**5 APPLIQUER**

$a, b, d$  et  $n$  sont des entiers naturels.

1) Démontrer que :

- a) si  $d$  divise  $3n + 4$  et  $9n - 5$ , alors  $d$  divise 17.





- b) si  $d$  divise  $a$  et  $b$ , alors  $d$  divise  $3a + 13b$  et  $a + 4b$ .  
c) si  $17$  divise  $a - 5b$ , alors  $17$  divise  $10a + b$ .  
2) Démontrer la réciproque de la proposition b.



### APPLIQUER

Soit  $n$  un entier naturel. Pour quelle(s) valeur(s) de  $n$  :

- 1)  $n$  divise-t-il  $n + 7$  ?  
2)  $n$  divise-t-il  $n + 12$  ?  
3)  $n + 11$  est divisible par  $n - 1$  ?



### APPLIQUER

Les entiers naturels  $109$ ,  $417$ ,  $271$ ,  $319$  et  $437$  sont-ils premiers ?



### APPLIQUER

Sans effectuer les calculs, indiquer si les nombres suivants sont divisibles par  $3$  et (ou)  $9$  et (ou)  $11$  ?  $12627$  ;  $4983$  ;  $3948$ .



### APPLIQUER

Sachant que : que  $5n + 7 = 5(n + 1) + 2$ .

Peut-on en déduire que  $2$  est le reste de la division euclidienne de  $5n + 7$  par  $5$  ?

Peut-on en déduire que  $2$  est le reste de la division euclidienne de  $5n + 7$  par  $n + 1$  ?



### S'ENTRAINER

Déterminer les entiers relatifs  $n$  tel que  $n - 4$  divise  $n + 2$ .



### S'ENTRAINER

Quelles sont les valeurs que peut prendre un diviseur relatif commun à  $5n - 3$  et à  $2n - 3$ , ou  $n$  désigne un entier relatif ?



### S'ENTRAINER

- 1)  $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels non nuls tels que  $a = 5b + 4$ . Peut-on affirmer que  $4$  est le reste de la division de  $a$  par  $5$  ? de  $a$  par  $b$  ?





2)  $n$  étant un entier naturel non nul, quel est le reste de division euclidienne de la division euclidienne de  $22n + 19$ . a) par 22 ? b) par 11 ? c) par  $11n$  ?



### S'ENTRAINER

Montrer que, si un entier naturel divise à la fois les entiers  $5n + 9$  et  $2n + 3$ , ne peut prendre que deux valeurs que l'on précisera.



### S'ENTRAINER

1) Déterminer les chiffres  $x$  et  $y$  pour que le nombre  $33y262x$  soit divisible par 25 et par 11.

2) Chercher les entiers naturels  $n$  pour que  $n+2$  divise  $3n+10$ .

3) Soient  $A=3n-5$  et  $B=2n-7$  où  $n$  est un entier naturel et  $d$  un diviseur de  $A$  et  $B$ .

a) Montrer que  $d$  divise 11.

b) Déduire les valeurs de  $d$ .



### S'ENTRAINER

1) Soit le nombre  $N = \overline{x3y4}$  à quatre chiffres.

Déterminer  $x$  et  $y$  pour que  $N$  soit divisible par 3 et 4.

2) Déterminer le chiffre  $x$  pour que le nombre  $N' = \overline{x304}$  soit divisible par 11.



### SEPERFECTIONNER

Montrer que, quel que soit l'entier naturel  $n$ , le nombre  $n(n+1)(n+5)$  est divisible par 6.



### SEPERFECTIONNER

Montrer que, quel que soit l'entier naturel  $n$ ,  $7^n - 3^n$  est divisible par 4.



# 1 Q-C-M

- 1) 2) si d divise a et b alors d divise toute combinaison linéaire de a et b donc en particulier  $3a + 11b$  ;  $a - b$  et  $a + b$ .
- 3) Faux si  $a = 1$  et  $b = 3$  ; 2 divise  $a + b$  et ne divise ni a ni b.
- 4) Faux si  $d = 2$  et  $a = 3$ , d divise  $2a$ , et d ne divise pas a.
- 5) si d divise a alors il existe un entier q tel que  $a = d q$  donc  $ab = d q b$ , alors d divise a b. (De même si d divise b).
- 6) Faux si  $d = 6$  et  $a = 4$  et  $b = 3$ , alors  $ab = 12$  donc d divise ab, et d ne divise ni a ni b.
- 7)  $5(3a + 1) - 3(5a - 1) = 8$  : si d est un diviseur commun de  $3a + 1$  et  $5a - 1$ , alors d divise toute combinaison linéaire de ces nombres en particulier  $5(3a + 1) - 3(5a - 1)$  donc d divise 8.
- 8) si d divise a et b et si  $a = b q + r$ , alors d divise toute combinaison linéaire de ces nombres en particulier  $a - b q$  or  $r = a - b q$  donc d divise r.

# 2 VRAI-FAUX

C'est Faux ! Pour justifier, il suffit d'exhiber un contre-exemple : 4 divise 36 et 6 divise 36 mais  $4 \times 6 = 24$  ne divise pas 36.

# 3 APPLIQUER

Si a divise b, alors il existe un entier q tel que  $b = a q$ . Par suite,  $b^2 = a^2 q^2$  et comme  $q^2$  est un entier, ce ci prouve que  $a^2$  divise  $b^2$ .

# 4 APPLIQUER

Deux nombres impairs consécutifs peuvent s'écrire  $2n + 1$  et  $2n + 3$  (pensez aussi à  $2n - 1$  et  $2n + 1$ ).  $2n + 1 + 2n + 3 = 4n + 4 = 4(n + 1)$ . Puisque  $n + 1$  est un entier, ceci prouve que la somme est divisible par 4.

# 5 APPLIQUER

- 1)a) si d divise  $3n + 4$  et  $9n - 5$ , alors d divise toute combinaison linéaire de ces deux nombres en particulier.  $N = 3(3n + 4) - (9n - 5) = 17$ , donc  $d = 1$  ou  $d = 17$
- b) si d divise a et b, alors d divise toute combinaison linéaire de ces deux nombres en particulier  $3a + 13 b$  et  $a + 4b$ .

- c) si 17 divise  $a - 5b$ , il existe un entier naturel q tel que  $a - 5b = 17q$  donc  
 $a = 17q + 5b$  ;  $10a + b = 170q + 50b + b = 17(10q + 3b)$  ;  
 $10q + 3b$  est un entier naturel donc 17 divise  $10a + b$ .
- 2) si 17 divise  $10a + b$ , il existe un entier naturel q tel que  $10a + b = 17q$  donc  
 $b = 17q - 10a$  ;  
 $a - 5b = a - 17 \times 5q + 50a = 17(3a - 5q)$  ;  
 $3a - 5q$  est un entier naturel donc 17 divise  $a - 5b$ .

# 6 APPLIQUER

- 1) si n divise  $n+7$  alors n divise  $n + 7 - n$  donc divise 7 donc  $n = 1$  ou  $n=7$
- 2) si n divise  $n + 12$  alors n divise  $n + 12 - n$  donc divise 12 donc  $n = 1$  ou 2 ou 3 ou 4 ou 6 ou 12.
- 3) si  $n - 1$  divise  $n + 11$ ,  $n - 1$  divise  $n + 11 - (n - 1)$  donc  $n - 1$  divise 12.

n - 1	1	2	3	4	6	12
n	2	3	4	5	7	13

# 7 APPLIQUER

- $11^2 > 109$  : 109 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7 donc est premier.  
 417 est divisible par 3 donc n'est pas premier.  
 $17^2 > 271$  : 271 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 11, 13 donc est premier.  
 $437 = 19 \times 23$  donc n'est pas premier.  
 $319 = 11 \times 29$  donc n'est pas premier.

# 8 APPLIQUER

- $1 + 2 + 6 + 2 + 7 = 18$  donc 12627 est divisible par 3 et par 9.  
 $1 + 6 + 7 - (2 + 2) = 10$  donc 12627 n'est pas divisible par 11.  
 $4 + 9 + 8 + 3 = 24$  donc 4983 est divisible par 3 mais pas par 9.  
 $4 + 8 - (9 + 3) = 0$  donc 4983 est divisible par 11.  
 $3 + 9 + 4 + 8 = 29$  donc 3948 est divisible par 3 mais pas par 9.  
 $3 + 4 - (9 + 8) = -10$  donc 3948 n'est pas divisible par 11.

# 9 APPLIQUER

On sait que  $0 \leq 2 < 5$  donc 2 est bien le reste de la division euclidienne de  $5n + 7$  par 5, mais, si  $n = 0$





ou  $n = 1$  on n'a pas  $2 < n + 1$ . Dans ces deux cas, 2 ne peut pas être le reste

### 10 S'ENTRAINER

Si  $n-4$  divise  $n+2$ , étant donné qu'il divise aussi  $n-4$ , alors il divise la différence de ces deux nombres :  $(n+2) - (n-4) = 6$ .

Réciproquement : si  $n-4$  divise 6, sachant qu'il divise  $n-4$ , alors  $n$  divise la somme de ces deux nombres :  $6 + n - 4 = n + 2$ .

Bilan :  $n-4$  divise  $n+2 \Leftrightarrow n-4$  divise 6  $\Leftrightarrow n-4 \in \{1; 2; 3; 6\}$

$n-4$  divise  $n+2 \Leftrightarrow n \in \{5; 6; 7; 10\}$ .

### 11 S'ENTRAINER

Tout diviseur  $d$  commun à  $5n-3$  et  $2n-3$  divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de ces deux nombres, donc  $d$  divise, entre autres :

$2(5n-3) - 5(2n-3) = 10n-6-10n+15=9$ .  $d$  ne peut donc prendre que 3 valeurs : 1, 3 et 9.

### 12 S'ENTRAINER

1) oui 4 est le reste de la division de  $a$  par 5 ( $0 \leq r < 5$ ).

Non pas forcément : si  $1 \leq b \leq 4$  on n'a pas  $0 \leq 4 < b$ .

2) a)  $r=19$

b)  $22n+19=11(2n+1)+8$  donc  $r=8$ .

c) si  $x \geq 2$ ,  $11n \geq 22$  donc  $r=19$ , si  $n=1$ ,  $r=8$  (voir b).

### 13 S'ENTRAINER

Si un entier naturel  $d$  divise à la fois  $5n+9$  et  $2n+3$ , alors  $d$  divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de ces deux nombres, donc  $d$  divise, entre autres :

$2(5n+9) - 5(2n+3) = 10n+18-10n-15=3$ .

3 n'a que deux diviseurs : 1 et 3 donc  $d$  ne peut prendre que ces deux valeurs.

### 14 S'ENTRAINER

1) Le nombre  $33y262x$  est divisible par 25 donc  $x=5$  ; pour  $x=5$ , le nombre  $33y2625$  est divisible par 11 si :  $5+6+y+3-(2+2+3)=14+y-7=7+y$  est divisible par 11, soit donc  $y=4$

Ainsi pour  $x=5$  et  $y=4$ , le nombre  $3342625$  est divisible par 25 et 11.

2) On a pour  $n \in \mathbb{N}$  ;  $\frac{3n+10}{n+2} = \frac{3(n+2)+4}{n+2} = 3 +$

$\frac{4}{n+2}$ , donc  $n+2$  divise  $3n+10$  si et seulement si

$n+2 \in D_4 = \{1, 2, 4\}$  donc  $n \in \{0, 2\}$

3) a)  $d$  divise  $A$  et  $B$ , donc  $d$  divise  $2A-3B=2(3n-5)-3(2n-7)=6n-10-6n+21=11$

b)  $d \in D_{11} = \{1, 11\}$

### 15 S'ENTRAINER

1)  $N = \overline{x3y4}$  est divisible par 4 donc  $y=0$ , ou  $y=2$  ou  $y=4$  ou  $y=6$  ou  $y=8$

Pour  $y=0$ ,  $N$  est divisible par 3 donc  $x=2$  ou  $x=5$  ou  $x=7$

Pour  $y=2$ ,  $N$  est divisible par 3 donc  $x=0$  ou  $x=3$  ou  $x=6$  ou  $x=9$

Pour  $y=4$ ,  $N$  est divisible par 3 donc  $x=1$  ou  $x=4$  ou  $x=7$

Pour  $y=6$ ,  $N$  est divisible par 3 donc  $x=2$  ou  $x=5$  ou  $x=8$

Pour  $y=8$ ,  $N$  est divisible par 3 donc  $x=0$  ou  $x=3$  ou  $x=6$  ou  $x=9$

2) le nombre  $N' = \overline{x304}$  est divisible par 11 soit donc  $4+3-0-x=7-x$  est divisible par 11, soit  $x=7$ . Le nombre  $N'=7304$  est donc divisible par 11.

### 16 SE PERFECTIONNER

On procède par disjonction des cas, en remarquant qu'un entier, dans la division par 6, a six restes possibles : 0, 1, 2, 3, 4, et 5 d'où six cas :

1) ou bien  $n = 6q$  alors  $n(n+1)(n+5) = 6q(n+1)(n+5)$  et comme  $q(n+1)(n+5)$  est bien divisible par 6.

2) ou bien  $n = 6q+1$ , alors  $n(n+1)(n+5) = n(n+1)(6q+1+5) = n(n+1)(6q+6) = 6n(n+1)(q+1)$  et comme  $n(n+1)(q+1)$  est un entier,  $n(n+1)(n+5)$  est divisible par 6.

3) ou bien  $n = 6q+2$ , alors  $n(n+1)(n+5) = (6q+2)(6q+2+1)(n+5) = (6q+2)(6q+3)(n+5) = 6(3q+1)(2q+1)(n+5)$  et comme  $(3q+1)(2q+1)(n+5)$  est un entier,  $n(n+1)(n+5)$  est divisible par 6.



4) ou bien  $n = 6q + 3$ , alors  $n(n + 1)(n + 5) = (6q + 3)(6q + 3 + 1)(n + 5) = (6q + 2)(6q + 4)(n + 5) = 6(3q + 1)(3q + 2)(n + 5)$  et comme  $(3q + 1)(3q + 2)(n + 5)$  est un entier,  $n(n + 1)(n + 5)$  est divisible par 6.

5) ou bien  $n = 6q + 4$ , alors  $n(n + 1)(n + 5) = (6q + 4)(n + 1)(6q + 4 + 5) = (6q + 4)(n + 1)(6q + 9) = 6(3q + 2)(n + 1)(2q + 3)$  et comme  $(3q + 2)(n + 1)(2q + 3)$  est un entier,  $n(n + 1)(n + 5)$  est divisible par 6.

6) ou bien  $n = 6q + 5$ , alors  $n(n + 1)(n + 5) = n(6q + 5 + 1)(n + 1) = n(6q + 6)(n + 1) = 6n(q + 1)(n + 5)$  et comme  $n(q + 1)(n + 5)$  est un entier,  $n(n + 1)(n + 5)$  est divisible par 6.

Bilan : dans tous les cas,  $n(n + 1)(n + 5)$  est divisible par 6.

### 17 **SE PERFECTIONNER**

On peut utiliser une identité remarquable : Pour  $n$  entier supérieur ou égal à 2 :

$$\begin{aligned} 7^n - 3^n &= (7 - 3)(7^{n-1} + 7^{n-2} \times 3 + \dots + 7 \times 3^{n-2} + 3^{n-1}) \\ &= \frac{4 \times (7^{n-1} + 7^{n-2} \times 3 + \dots + 7 \times 3^{n-2} + 3^{n-1})}{\text{entier}} \end{aligned}$$

Donc  $7^n - 3^n$  est divisible par 4.



## Suite arithmétique- suite géométrique

### I) Résumé du cours :

#### A) Suites arithmétiques

##### 1) Définition :

On dit que la suite de nombres  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r$  si et seulement si  $u_{n+1} = u_n + r$

##### 2) Propriétés des suites arithmétiques :

Soit  $u_n$  le terme de la suite arithmétique au rang  $n$ , si  $u_0$  est le premier terme de cette suite et  $r$  la raison alors :  $u_n = u_0 + (n-0) \times r = u_0 + n \times r$

##### 3) Représentation graphique :

$(u_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r$  et de premier terme  $u_0$  ; Les points  $M(n, u_n)$  sont sur la droite d'équation  $y = rx + u_0$

##### 4) Somme des termes d'une suite arithmétique :

$(u_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r$  et de premier terme  $u_0$  et  $S_0$  la somme de ses premiers termes jusqu'au rang  $p$ , alors :  $S_p = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{p-1} + u_p$

$$S_p = (\text{Nombre de terme}(u_n) \text{ intervenant dans la somme}) \times \frac{(\text{le premier terme de la somme} + \text{le dernier terme de la somme})}{2}$$

Soit  $(u_n)$  le terme de la suite arithmétique au rang  $n$ ,  $u_1$  est le premier terme de cette suite et  $r$  la raison alors :  $u_n = u_1 + (n-1) \times r$

Soit  $(u_n)$  le terme de la suite arithmétique au rang  $n$ , si  $u_2$  est le premier terme de cette suite et  $r$  la raison alors :  $u_n = u_2 + (n-2) \times r$

##### Plus généralement :

Soit  $(u_n)$  le terme de la suite arithmétique au rang  $n$ , si  $u_1$  est le premier terme de cette suite et  $r$  la raison alors :  $u_n = u_k + (n-k) \times r$

##### Remarques :

moyenne arithmétique : Si  $a, b$  et  $c$  sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors  $b = \frac{a+c}{2}$





De manière plus générale, si  $u_p, u_{p+1}, \dots, u_{p+n}$  sont  $n+1$  termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors la moyenne arithmétique de ces termes est la moyenne arithmétique des termes extrêmes :  $\frac{u_p + u_{p+n}}{2}$

## B) Suites géométriques

### 1) Définition :

Une suite de terme général  $u_n$  est une suite géométrique si chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par une constante. Cette constante est alors appelée raison de la suite.  $u_{n+1} = u_n \times q$  avec  $q$  constante (raison de la suite)

De même que la suite arithmétique, la suite géométrique est déterminée par la donnée de son premier terme et sa raison.

Pour prouver qu'une suite est géométrique, il faut démontrer que le rapport  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  est constant (indépendant de  $n$ )

### Exemples :

La suite des nombres 1 2 4 8 16 32 64 128 sont les termes consécutifs d'une suite géométrique de 1<sup>er</sup> terme 1 et de raison 2

1 -1 1 -1 1 -1 1.....sont les termes consécutifs d'une suite géométrique de 1<sup>er</sup> terme 1 et de raison -1

La suite des nombres  $1 -\frac{1}{4} \frac{1}{16} -\frac{1}{64} \frac{1}{256} -\frac{1}{1024} \dots$  sont les termes consécutifs d'une suite géométrique de 1<sup>er</sup> terme 1 et de raison  $-\frac{1}{4}$

### 2) Expression du terme général d'une suite géométrique :

$$u_1 = u_0 \times q ; u_2 = u_0 \times q \times q ; u_3 = u_0 \times q^2 \times q ; u_4 = u_0 \times q^3 ; u_n = u_0 \times q^n ; u_n = u_m \times q^{n-m}$$

### Exemples :

$$u_{10} = u_6 \times q^4 ; u_{15} = u_{11} \times q^4 ; u_{26} = u_{12} \times q^{14}$$

### Application 1:

Les suites suivantes sont géométriques. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  dans chacun des cas suivants :

1.  $u_0 = -2$  et la raison est  $-\frac{1}{2}$

2.  $u_0 = -1$  et la raison est  $-1$



**Solution :**

$$u_n = -2 \left( -\frac{1}{2} \right)^n ; u_n = -1(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

**Application 2**

Les suites suivantes, de terme général  $u_n$  sont géométriques de raison  $b$ . Déterminer l'entier  $i$  dans chacun des cas suivants :

1)  $u_0 = 4, u_4 = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$

2)  $u_1 = \frac{2}{3}, u_5 = \frac{8}{243}, u_i = \frac{4}{27}$

3)  $u_3 = -16, u_7 = -1, u_i = \frac{1}{8}$

**Solution :**

1)  $u_n = 4 \left( \frac{1}{2} \right)^n$  donc  $u_i = 4 \left( \frac{1}{2} \right)^i = \frac{1}{4} ; \left( \frac{1}{2} \right)^i = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$  donc  $2^i = 2^4$  donc  $i=4$

Essayons de déterminer  $b : u_5 = u_1 \times b^4 = \frac{2}{3} \times b^4 = \frac{8}{243}$

$$\frac{2}{3} \times b^4 = \frac{8}{243} \text{ donc } b^4 = \frac{8 \times 3}{243 \times 2} = \frac{4}{81} = \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \right)^4 \text{ donc } b = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ ou } b = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Si  $b = \frac{\sqrt{2}}{3}$  alors  $u_i = \frac{\sqrt{2}}{3} ; u_i = \frac{2}{3} \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \right)^{i-1} = \frac{4}{27}$  donc  $\left( \frac{\sqrt{2}}{3} \right)^{i-1} = \frac{2}{9} ; \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \right)^{i-1} = \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \right)^2$  donc  $i-$

$1=2$  donc  $i=3$

On obtient le même résultat en prenant  $b = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

2)  $u_7 = u_3 \times b^4 = -16 \times b^4 = -1$  donc  $b^4 = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = \left( \frac{1}{2} \right)^4$ . On a  $b = \frac{1}{2}$  ou  $b = -\frac{1}{2} ; u_i = u_7 \times b^{i-7}$

$$\frac{1}{8} = (-1)b^{i-7}$$

On étudie les 2 cas :

Si  $b = \frac{1}{2}$  alors  $\frac{1}{8} = (-1) \left( \frac{1}{2} \right)^{i-7} ; -\frac{1}{8} = \left( \frac{1}{2} \right)^{i-7}$  n'a pas de solution car  $\left( \frac{1}{2} \right)^{i-7}$  est positif.

Si  $b = -\frac{1}{2}$  alors  $\frac{1}{8} = (-1) \left( -\frac{1}{2} \right)^{i-7} ; -\frac{1}{8} = \left( -\frac{1}{2} \right)^3 = \left( -\frac{1}{2} \right)^{i-7}$  donc  $i-7=3$  soit  $i=10$



**Remarque : Moyenne géométrique :**

Si  $a, b$  et  $c$  sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique alors  $b^2 = ac$

Si trois nombres positifs  $a, b$  et  $c$  vérifient  $b^2 = ac$ , on dit que  $b$  est la moyenne géométrique de  $a$  et  $c$ .

**3) Sommes des termes consécutifs d'une suite géométrique :**

Si  $u_n$  est le terme général d'une suite géométrique de raison  $q \neq 1$ , alors :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

**Plus généralement :**

$$\text{Somme des termes consécutifs} = 1^{\text{er}} \text{ terme} \frac{1 - \text{raison}^{\text{nbre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

**Application:**

Calculer les sommes suivantes:

1.  $S = 2 + 4 + 8 + \dots + 256$

2.  $S' = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{128}$

3.  $S'' = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{10^5}$

**Solution :**

1)  $S = 2 + 4 + 8 + \dots + 256$

$$S = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^8$$

C'est la somme de 8 termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 2 et de raison 2.

$$S = 2 \frac{1 - 2^8}{1 - 2} = 2 \frac{1 - 256}{1 - 2} = 510$$

2)  $S' = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{128}$  ;

$$S' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{64} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

C'est la somme de 4 termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme  $\frac{1}{2}$

et de raison  $\frac{1}{4}$ .

$$S' = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^4}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{256}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{256}\right) ; S' = \frac{2}{3} \times \frac{255}{256} = \frac{85}{128}$$



3)  $S'' = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^5}$  : c'est la somme de 6 termes d'une suite géométrique de

premier terme 1 et de raison  $\frac{1}{10}$  ;  $S'' = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^6}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1 - 0.000001}{0.9} = \frac{0.999999}{0.9} = 1.111111$

**En résumé :**

### Suite arithmétiques et suites géométriques :

Suites arithmétiques	Suite géométriques
$u_{n+1} = u_n + r$ $u_{n+1} - u_n = cte \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_p + (n - p)r$ $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$ D'une façon générale : $S_n = N \times \frac{1^{er} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$ Ou N est le nombre de termes	$u_{n+1} = q \times u_n$ et un premier. q est la raison $\frac{u_{n+1}}{u_n} = cte \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = u_0 + q^n$ ou $u_n = u_p \times q^{n-p}$ $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ $S_n = 1^{er} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{nbre \text{ de termes}}}{1 - q}$

## II) Exercices

**1 Q-C-M; VRAI-FAUX**

Répondez par vrai ou faux

1)  $U_n$  désignera une suite arithmétique de raison  $a$  et de 1<sup>ère</sup> terme  $U_0$

i. Si  $U_0 = 2$  et que  $a = 4$  alors  $U_{10}$  est égale à :

a) 42                      b) 24                      c) 12

ii. Si  $U_1 = 5$  et que  $a = -2$  alors  $U_8$  est égale à :

a) -11                      b) -9                      c) 19

iii. Si  $U_7 = 79$  et que  $U_8 = 82$  alors  $a$  est égale à :

a) 3                      b) 1                      c) -2

iv. Si  $U_{10} = 4$  et que  $U_{35} = 54$  alors  $a$  est égale à :

a) 50                      b) 2                      c) 25





v. Si  $U_0 = 5$  et que  $a = \frac{1}{3}$ . Quel nombre n'appartient pas à cette suite

- a)  $\frac{14}{3}$                       b)  $\frac{23}{3}$                       c) 8

2)  $U_n$  désignera une suite géométrique de raison  $b$  et de 1<sup>er</sup> terme  $U_0$

i. Si  $U_0 = \frac{1}{8}$  et que  $b = 2$  alors  $U_{10}$  est égale à :

- a) 1024                      b) 128                      c) 20.15

ii. Si  $U_0 = \frac{1}{2}$  et que  $U_1 = 4$  alors  $b$  est égale à :

- a) 8                      b) 2                      c) 4

iii. Si  $U_5 = 1$  et que  $b = \frac{1}{2}$ . quelle nombre correspond à  $U_1$

- a) 12                      b) 15                      c) 16

iv. Soit  $S = 2 + 4 + 8 + \dots + 256$  alors :

- a)  $S = 510$                       b) 640                      c) 320

v. Si  $U_n = \sqrt{7^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  alors :

- a)  $U_0 = \sqrt{7}$  et  $b = 7$                       b)  $U_0 = \sqrt{7}$  et  $b = \sqrt{7}$                       c)  $U_0 = 1$  et  $b = \sqrt{7}$



## APPLIQUER

Soit la suite  $U$  définie sur  $\mathbb{N}$  par : 
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2}{3 - U_n} \end{cases} \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

1) a) Calculer  $U_1$  et  $U_2$

b) la suite  $U$  est-elle arithmétique ? est-elle géométrique ?

2) on définit la suite  $V$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n - 1}$

a) Calculer  $V_0$ ,  $V_1$  et  $V_2$

b) Montrer que  $V$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.

c) Exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$ .

d) On déduit que :  $U_n = \frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+1} - 1}$

3) On pose  $S_n = \frac{1}{1 - U_0} + \frac{1}{1 - U_1} + \dots + \frac{1}{1 - U_n}$ . Montrer que  $S_n = 2^{n+2} - n - 3$



### 3 APPLIQUER

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 6$  et  $u_{n+1} = \frac{4u_n - 6}{u_n - 1}$

1) Calculez  $u_1, u_2$  et  $u_3$ .

2) On note  $(v_n)$  la suite définie par  $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 2}$

Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{2v_n - 3}{v_n - 1}$ .

3) En déduire une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

### 4 APPLIQUER

Après avoir identifié si on utilise une somme de termes de suites géométriques ou arithmétiques, calculer les sommes ci-dessous :

1)  $S_1 = 1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + \dots + 8\sqrt{2}$

2)  $S_2 = 1 + x + x^2 + \dots + x^{50}$  ( $x \neq 1$ )

3)  $S_3 = a + 2a + 3a + 4a + \dots + 275a$

### 5 APPLIQUER

On note  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $A_0 = 1$  et  $A_{n+1} = A_n - \frac{3}{5} \times (2)^n$

Exprimer  $A_n$  en fonction de  $n$ .

### 6 S'ENTRAINER

$(u_n)$  est une suite arithmétique définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $u_1 = 2$  et  $u_4 + u_7 = 31$

1) a) Déterminer la raison  $r$  de cette suite

b) Calculer  $u_n$  en fonction de  $n$

2) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $T_n = \frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \frac{1}{u_3 u_4} + \dots + \frac{1}{u_n u_{n+1}}$

a) Montrer que  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ;  $\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}} = \frac{r}{u_k u_{k+1}}$

b) Déduire que  $T_n = \frac{n}{6n + 4}$



**S'ENTRAINER**

On considère la suite  $U$  définie par : 
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n}{3 - 2U_n} \end{cases}$$

- 1) Montrer que la suite  $U$  n'est pas arithmétique.
- 2) Soit la suite  $V$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $V_n = \frac{3}{U_n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$
- a) Montrer que  $V$  est une suite arithmétique et exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- b) Calculer la somme  $S = V_0 + V_1 + \dots + V_{45}$
- c) En déduire la somme  $S' = \frac{1}{U_2} + \frac{1}{U_3} + \frac{1}{U_4} + \dots + \frac{1}{U_{45}}$

**S'ENTRAINER**

On considère la suite  $U$  définie par : 
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{4}{4 - U_n} \end{cases}$$

- 1) Montrer que la suite  $U$  n'est pas arithmétique.
- 2) Soit la suite  $V$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $V_n = \frac{2}{2 - U_n}$ .
  - a) Montrer que  $V$  est une suite arithmétique.
  - b) Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$
  - c) Calculer en fonction de  $n$  la somme  $S = V_0 + V_1 + \dots + V_n$
- 3) Calculer en fonction de  $n$  le produit  $P_n = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ .

**SEPERFECTIONNER**

Calculer  $S = 1 - 3 + 9 - 27 + 81 - \dots + 6561$  et  $S' = 1 + 2 + 3 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \dots + \frac{1}{6561}$

**SEPERFECTIONNER**

Soit  $U$  la suite géométrique de raison  $q = 2$  et de premier terme  $U_0 = 1$ .

- 1) Déterminer  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- 2) Soit la suite  $V$  définie par : 
$$\begin{cases} V_0 = \frac{3}{2} \\ V_{n+1} = 2V_n + U_n \end{cases}$$
  - a) Calculer  $V_1$  et  $V_2$ .





- b) Montrer que la suite  $V$  est ni arithmétique ni géométrique.
- 3) Soit la suite  $W$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $W_n = \frac{V_n}{U_n}$ .
- a) Montrer que  $W$  est une suite arithmétique.
- b) Exprimer  $W_n$  en fonction de  $n$  et en déduire  $V_n$  en fonction de  $n$ .
- 4) Calculer la somme  $S = \sum_{k=0}^{10} \frac{V_k}{U_k}$

**SEPERFECTIONNER**

Soit  $u$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 5 \end{cases}$  et la suite  $v$  définie par  $v_n = u_n - \frac{5}{2}$

- 1) Montrer que la suite  $u$  est ni arithmétique ni géométrique
- 2) Montrer que  $v$  est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison  $q$ .
- 3) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- 4) a) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que :  $v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = a q^{n+1} + b$
- b) En déduire la somme :  $S' = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$
- 5) Lundi à 08 h du matin, un premier élève apprend que le prof est absent, dans les trois minutes qui suivent il communique la nouvelle à trois autres élèves. Chacun de ces élèves s'empresse de le dire lui aussi à trois autres élèves dans les trois minutes qui suivent, et ainsi de suite ... chaque élève qui apprend la nouvelle, la communique au bout de trois minutes à trois autres ...
- Le lycée compte 2000 élèves. A quelle heure, est-on sûr que tous les élèves seront au courant de la nouvelle.



1

VRAI-FAUX; Q-C-M

- 1) i) 42 ii) -9 iii) 3 iv) 2 v)  $\frac{14}{3}$   
 2) i) 128 ii) 2 iii) 16 iv) 510 v)  $U_0 = 1$  et  $b = \sqrt{7}$

2

APPLIQUER

1) a)  $U_1 = \frac{2}{3-U_0} = \frac{2}{3}$ ;  $U_2 = \frac{2}{3-U_1} = \frac{2}{3-\frac{2}{3}} = \frac{2}{\frac{7}{3}} = \frac{6}{7}$

b) \*  $U_1 - U_0 = \frac{2}{3}$ ;  $U_2 - U_1 = \frac{6}{7} - \frac{2}{3} = \frac{4}{21}$

$U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1 \Rightarrow (U_n)_n$  n'est pas une suite arithmétique

\*  $\frac{U_2}{U_1} = \frac{6}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{7}$

calculons :

$U_3 = \frac{2}{3-U_2} = \frac{2}{3-\frac{6}{7}} = \frac{2}{\frac{15}{7}} = \frac{14}{15}$

$\frac{U_3}{U_2} = \frac{14}{15} \times \frac{7}{6} = \frac{98}{135}$ ;

$\frac{U_2}{U_1} \neq \frac{U_3}{U_2}$

$\Rightarrow (U_n)$  n'est pas une suite géométrique

2) a)  $V_0 = \frac{U_0-2}{U_0-1} = 2$ ;  $V_1 = \frac{U_1-2}{U_1-1} = \frac{\frac{2}{3}-2}{\frac{2}{3}-1} = \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{1}{3}} = 4$ ;

$V_2 = \frac{U_2-2}{U_2-1} = \frac{\frac{6}{7}-2}{\frac{6}{7}-1} = \frac{-\frac{8}{7}}{-\frac{1}{7}} = 8$

b)  $V_{n+1} = \frac{U_{n+1}-2}{U_{n+1}-1} = \frac{\frac{2}{3-U_n}-2}{\frac{2}{3-U_n}-1} = \frac{2-6+2U_n}{2-3+U_n}$   
 $= \frac{-4+2U_n}{-1+U_n} = 2 \frac{(U_n-2)}{U_n-1} = 2V_n$

Donc  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison  $q=2$

c)  $V_n = q^n V_0 = 2^n \times 2 = 2^n \times 2^1 = 2^{n+1}$

d) on a

$V_n = \frac{U_n-2}{U_n-1} \Leftrightarrow V_n(U_n-1) = U_n-2$

$\Leftrightarrow U_n(V_n-1) = V_n-2 \Leftrightarrow U_n = \frac{V_n-2}{V_n-1}$

Donc  $U_n = \frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}$

3)  $S_n = \frac{1}{1-U_0} + \frac{1}{1-U_1} + \dots + \frac{1}{1-U_n}$  on a

$U_n = \frac{V_n-2}{V_n-1} \Leftrightarrow 1-U_n = 1 - \frac{V_n-2}{V_n-1} = \frac{V_n-1-V_n+2}{V_n-1} = \frac{1}{V_n-1}$

donc  $\frac{1}{1-U_n} = V_n-1$

Ainsi  $S_n = (V_0-1) + (V_1-1) + \dots + (V_n-1)$

$= V_0 + V_1 + \dots + V_n - (1+1+\dots+1)$

$= V_0 \frac{1-2^{n+1}}{1-2} - (n+1) = 2 \frac{1-2^{n+1}}{-1} - (n+1)$

$= -2 + 2^{n+2} - n - 1 = 2^{n+2} - n - 3$

3

APPLIQUER

1.  $u_1 = \frac{4u_0-6}{u_0-1} = \frac{4 \times 6 - 6}{6-1} = \frac{18}{5}$

$u_2 = \frac{4u_1-6}{u_1-1} = \frac{4 \times \frac{18}{5} - 6}{\frac{18}{5}-1} = \frac{42}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{42}{13}$

$u_3 = \frac{4u_2-6}{u_2-1} = \frac{4 \times \frac{42}{13} - 6}{\frac{42}{13}-1} = \frac{90}{13} \times \frac{13}{29} = \frac{90}{29}$

2. On note  $(u_n)$  la suite définie par  $v_n = \frac{u_n-3}{u_n-2}$

Calculer  $V_0, V_1$  et  $V_2$

$v_0 = \frac{u_0-3}{u_0-2} = \frac{6-3}{6-2} = \frac{3}{4}$

Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{2v_n-3}{v_n-1}$ .

On sait que  $v_n = \frac{u_n-3}{u_n-2}$

$\Leftrightarrow v_n(u_n-2) = u_n-3 \Leftrightarrow v_n u_n - 2v_n = u_n-3$

$\Leftrightarrow u_n v_n - u_n = 2v_n - 3 \Leftrightarrow u_n v (u_n - 1) = 2v_n - 3$

Or  $u_n - 3 \neq u_n - 2$  donc  $u_n \neq 1$  donc on peut diviser par  $u_n - 1$ , on obtient donc :  $u_n = \frac{2v_n-3}{v_n-1}$

3. En déduire une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

$u_n = \frac{2v_n-3}{v_n-1} = \frac{2 \times \frac{3}{2^{n+2}} - 3}{\frac{3}{2^{n+2}} - 1} = \frac{\frac{6}{2^{n+2}} - 3}{\frac{3}{2^{n+2}} - 1}$



#### 4 APPLIQUER

$$1) S_1 = 1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + \dots + 8\sqrt{2}$$

$S_1$  est la somme des 8 premiers termes d'une suite géométrique de raison  $\sqrt{2}$  et de premier terme 1.

$$S_1 = 1 \times \frac{1 - (\sqrt{2})^8}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1 - 16}{1 - \sqrt{2}} \\ = -15 \times \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - 2} = 15(1 + \sqrt{2}) = 15 + 15\sqrt{2}$$

$$2) S_2 = 1 + x + x^2 + \dots + x^{50}$$

$$S_1 = \sum_{k=0}^{50} (\sqrt{2})^k = 1 \times \frac{1 - x^{51}}{1 - x} = \frac{1 - x^{51}}{1 - x}$$

$$3) S_3 = a + 2a + 3a + 4a + \dots + 275a$$

$S_3$  est la somme des 275 premiers termes d'une suite arithmétique de raison  $a$  et de premier terme

$$a: S_3 = 275 \times \frac{a + 275a}{2} = 37950a$$

#### 5 APPLIQUER

$$A_n + A_{n-1} + A_{n-2} + \dots + A_1 \\ = A_{n-1} + A_{n-2} + \dots + A_1 + A_0 - \frac{3}{5} \times 2^{n-1} - \frac{3}{5} \times 2^{n-2} + \dots - \frac{3}{5} \times 2^0 \\ \text{donc: } A_n = A_0 - \frac{3}{5} \times 2^{n-1} - \frac{3}{5} \times 2^{n-2} + \dots - \frac{3}{5} \times 2^0 \\ \text{donc } A_n = 1 - \frac{3}{5} \times 2^{n-1} - \frac{3}{5} \times 2^{n-2} + \dots - \frac{3}{5} \times 2^0$$

#### 6 S'ENTRAINER

$$1)a) U_4 = U_1 + 3r \quad \text{et} \quad U_7 = U_1 + 6r \quad \text{donc}$$

$$U_4 + U_7 = 2U_1 + 9r \Rightarrow 31 = 4 + 9r \Rightarrow 9r = 27$$

$$\Rightarrow r = 3$$

b)  $(U_n)$  est une suite arithmétique donc

$$U_n = U_1 + (n-1)r \Rightarrow U_n = 2 + 3(n-1) \Rightarrow U_n = 3n - 1$$

$$2)a) \text{ soit } k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{U_k} - \frac{1}{U_{k+1}} = \frac{U_{k+1} - U_k}{U_k U_{k+1}} = \frac{r}{U_k U_{k+1}}$$

$$b) 3T_n = \frac{3}{U_1 U_2} + \frac{3}{U_2 U_3} + \dots + \frac{3}{U_n U_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{U_1} - \frac{1}{U_2} + \frac{1}{U_2} - \frac{1}{U_3} + \dots + \frac{1}{U_n} - \frac{1}{U_{n+1}} \\ = \frac{1}{U_n} - \frac{1}{U_{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3(n+1)-1} \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} = \frac{3n+2-2}{2(3n+2)} = \frac{3n}{2(3n+2)} \\ \Rightarrow 3T_n = \frac{3n}{2(3n+2)} \Rightarrow T_n = \frac{n}{6n+4}$$

#### 7 S'ENTRAINER

$$1) U_1 = \frac{3U_0}{3-2U_0} = \frac{3}{1} = 3; U_2 = \frac{3U_1}{3-2U_1} = \frac{9}{3-6} = -3$$

$$U_1 - U_0 = 3 - 1 = 2; U_2 - U_1 = -3 - 1 = -4,$$

donc  $(U_n)_n$  n'est pas une suite arithmétique

$$2)a) V_{n+1} = \frac{3}{U_{n+1}} = \frac{3(3-2U_n)}{3U_n} = \frac{3-2U_n}{U_n} \\ = \frac{3}{U_n} - 2 = V_n - 2, \text{ donc } (V_n)_n \text{ est une suite}$$

arithmétique de raison  $r = 2$

$$V_n = V_0 + nr = 3 - 2n \text{ On a } U_n = \frac{3}{V_n} = \frac{3}{3-2n}$$

$$b) S = V_0 + \dots + V_{45} = \frac{(V_0 + V_{45}) \times 46}{2} \\ = \frac{(3 + 3 - 90) \times 46}{2} = \frac{84 \times 46}{2} = -1932$$

$$c) S' = \frac{1}{U_2} + \frac{1}{U_3} + \dots + \frac{1}{U_{45}} \\ = \frac{1}{3} V_2 + \frac{1}{3} V_3 + \dots + \frac{1}{3} V_{45} = \frac{1}{3} (V_2 + V_3 + \dots + V_{45})$$

$$S' = \frac{1}{3} (S - V_0 - V_1) = \frac{1}{3} (-1932 - 3 - 1)$$

$$\Rightarrow S' = \frac{-1936}{3}$$

#### 8 S'ENTRAINER

$$1) U_1 = \frac{4}{4-U_0} = 1, U_2 = \frac{4}{4-U_1} = \frac{4}{3}$$

$$U_1 - U_0 = 1, U_2 - U_1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1 \Rightarrow (U_n)_n$$

n'est pas une suite arithmétique

$$2)a) = \frac{4-U_n}{2-U_n} = \frac{2}{2-U_n} + \frac{2-U_n}{2-U_n} = 1 + V_n$$





$$V_{n+1} = \frac{2}{2-U_{n+1}} = \frac{2}{2-\frac{4}{4-U_n}} = \frac{2(4-U_n)}{8-2U_n-4}$$

Donc  $V_{n+1} - V_n = 1$

$\Rightarrow (V_n)_n$  est une suite arithmétique de raison  $r = 1$

b)  $V_n = V_0 + nr = 1 + n,$

on a  $V_n = \frac{2}{2-U_1} \Rightarrow (2-U_n)V_n = 2$

$$\Rightarrow 2V_n - U_n V_n = 2 \Rightarrow U_n = \frac{2V_n - 2}{V_n}$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{2(n+1) - 2}{n+1} = \frac{2n}{n+1}$$

c)  $S = V_0 + V_1 + \dots + V_n$   
 $= \frac{(V_0 + V_n)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

3)  $P_n = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$

On a :

$$U_n = 2 - \frac{2}{V_n} = 2 \left( 1 - \frac{1}{V_n} \right)$$

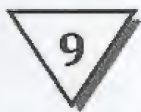
donc  $P_n = 2 \left( 1 - \frac{1}{V_1} \right) \times 2 \left( 1 - \frac{1}{V_2} \right) \times \dots \times 2 \left( 1 - \frac{1}{V_n} \right)$

$$= 2^n \left( 1 - \frac{1}{V_1} \right) \times \left( 1 - \frac{1}{V_2} \right) \times \dots \times \left( 1 - \frac{1}{V_n} \right)$$

$$= 2^n \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \times \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \times \dots \times \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 2^n \times \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \dots \times \frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n}} \times \frac{1}{n+1}$$

$$= 2^n \times \frac{1}{n+1} = \frac{2^n}{n+1}$$



### SE PERFECTIONNER

$$S = 1 - 3 + 9 - 27 + 81 - \dots + 6561$$

$$= 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + 3^4 - \dots + 3^8$$

$$= (1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + 3^8) - (3 + 3^3 + 3^5 + 3^7)$$

Soit  $V_n = 3^n$  ;  $n \in \mathbb{R}$

$V_n$  est une suite géométrique de raison 3 et de 1<sup>er</sup> terme  $V_0 = 1$

$$1 + 3^2 + 3^4 + \dots + 3^8 = V_0 + V_2 + V_4 + V_6 + V_8 = V_0 \frac{1-3^9}{1-3} = \frac{1-3^9}{-2}$$

$$3 + 3^3 + 3^5 + 3^7 = V_1 + V_3 + V_5 + V_7 = V_1 \frac{1-3^8}{-2}$$

$$= 3 \times \frac{1-3^8}{-2} \Rightarrow S = \frac{3^9-1}{2} - \frac{3-3^8}{-2} = \frac{3^9-1}{2} - \frac{3^8-3}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$$S' = 1 + 2 + 3 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \dots + \frac{1}{6561}$$

$$= 1 + 2 + 3 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \dots + \frac{1}{3^8}$$

$$= 1 + 2 + 3 - \frac{3^7}{3^8} + \frac{3^6}{3^8} - \frac{3^5}{3^8} + \frac{3^4}{3^8} - \dots + \frac{1}{3^8}$$

$$= 1 + 2 + 3 + \frac{1+3^2+3^4+3^6}{3^8} - \frac{3+3^3+3^5+3^7}{3^8}$$

$$= 6 + \frac{V_0 + V_2 + V_4 + V_6}{3^8} - \frac{V_1 + V_3 + V_5 + V_7}{3^8}$$

$$V_0 + V_2 + V_4 + V_6 = V_0 \frac{1-3^8}{-2} = \frac{3^8-1}{2}$$

$$V_1 + V_3 + V_5 + V_7 = V_1 \frac{1-3^8}{-2} = 3 \frac{3^8-1}{2}$$

$$S' = 6 + \frac{3^8-1}{2} - \frac{3^8-3}{2} = \frac{12+3^8-1-3^8+3}{2}$$

$$= \frac{14+3^8-3^8}{2} = \frac{14+3^8(1-3)}{2} = \frac{14-2+3^8}{2} = \frac{14-162}{2} = -74$$



### 10 SE PERFECTIONNER

1)  $U_n = q^n \times U_0 = 2^n$

2)a)  $V_1 = 2V_0 + U_0 = 3 + 1 = 4$

$$V_2 = 2V_1 + U_1 = 2(2V_0 + U_0) + 4$$

$$= 4V_0 + 2U_0 + 4 = 16 + 4 + 4 = 24$$

b)  $V_1 - V_0 = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$  ;  $V_2 - V_1 = 24 - 4 = 20$ ,

donc  $V_1 - V_0 \neq V_2 - V_1$

$\Rightarrow (V_n)_n$  n'est pas une suite arithmétique

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3} \quad \text{et} \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{24}{4} = 6$$

donc  $(V_n)_n$  n'est pas une suite géométrique

3)a)  $W_{n+1} = \frac{V_{n+1}}{U_{n+1}} = \frac{2V_n + U_n}{U_{n+1}}$

or  $U_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2 \times U_n$

$$= \frac{2V_n + U_n}{2U_n} = \frac{V_n}{U_n} + \frac{1}{2} = W_n + \frac{1}{2}$$

donc  $(W_n)_n$  est une suite arithmétique de raison

$$r = \frac{1}{2}$$

b)  $W_n = W_0 + nr = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}n$  ;  $V_n = U_n W_n = 2^n \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{2}n \right)$





$$4) = \frac{(\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 5) \times 11}{2} = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

$$S = \sum_{k=0}^{10} \frac{V_k}{U_k} = \sum_{k=0}^{10} W_k = \frac{(W_0 + W_{10}) \times 11}{2}$$

**SE PERFECTIONNER**

1) calculons  $U_1$  et  $U_2$

$$U_1 = 3U_0 - 5 = 6 - 5 = 1 \text{ et } U_2 = 3U_1 - 5 = 3 - 5 = -2 \text{ et}$$

on vérifie facilement que  $(U_n)$ , ni une suite arithmétique ni une suite géométrique

$$\begin{aligned} 2) V_{n+1} &= U_{n+1} - \frac{5}{2} = 3U_n - 5 - \frac{5}{2} = 3U_n - \frac{10}{2} - \frac{5}{2} \\ &= 3U_n - \frac{15}{2} = 3(U_n - \frac{5}{2}) = 3V_n \end{aligned}$$

Donc  $(V_n)$  est une suite géométrique de 1<sup>er</sup> terme

$$V_0 = -\frac{1}{2} \text{ et de raison } q = 3$$

$$3) V_n = q^n V_0 = -\frac{1}{2} \times 3^n \text{ et } U_n = -\frac{3^n}{2} + \frac{5}{2}$$

$$4)a) V_0 + V_1 + \dots + V_n = aq^{n+1} + b$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \times \frac{3^{n+1} - 1}{2} = a3^{n+1} + b$$

$$\frac{3^{n+1} - 1}{4} = a3^{n+1} + b \Rightarrow \frac{1}{4} \times 3^{n+1} - \frac{1}{4} = a3^{n+1} + b$$

$$\text{Donc } a = \frac{1}{4} \text{ et } b = -\frac{1}{4}$$

b)

$$S' = U_0 + U_1 + \dots + U_n = (V_0 + \frac{5}{2}) + (V_1 + \frac{5}{2}) + \dots + (V_n + \frac{5}{2})$$

$$= V_0 + V_1 + \dots + V_n + (\frac{5}{2} + \dots + \frac{5}{2})$$

$$S' = \frac{3^{n+1} - 1}{4} + \left(\frac{5}{2}\right)^{n+1}$$





## Généralités sur les fonctions

### I) Résumé du cours :

#### A) Parité :


$f$  est paire sur un intervalle  $I$  si et seulement si :  $\begin{cases} I \text{ est centré en } 0 \\ \forall x \in I : f(-x) = f(x) \end{cases}$

$C_f$  est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

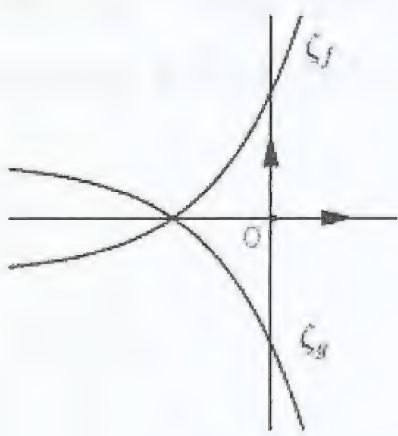
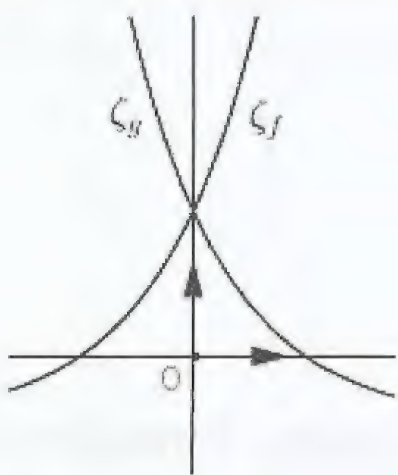
$f$  est impaire sur un intervalle  $I$  si et seulement si :  $\begin{cases} I \text{ est centré en } 0 \\ \forall x \in I : f(-x) = -f(x) \end{cases}$

$C_f$  est alors symétrique par rapport à l'origine du repère

#### B) Opération sur les fonctions

	courbe	Variation
$g : x \rightarrow f(x) + b$	$\zeta_g$ s'obtient à partir de $\zeta_f$ par translation de vecteur : $b\vec{j}$	$f$ et $g$ ont même sens de variation sur $I$
$g : x \rightarrow f(x + a)$ $I = IR$	$\zeta_g$ s'obtient à partir de $\zeta_f$ par translation de vecteur : $-a\vec{i}$	$f$ et $g$ ont même sens de variation sur $I$
Bilan $g := f(x + a) + b$		La courbe de $\zeta_g$ est l'image de la courbe $\zeta_f$ par la translation de vecteur $\vec{v} : -a\vec{i} + b\vec{j}$
$g : x \rightarrow k \times f(x)$ $g : x \rightarrow k \in IR \setminus \{0\}$	$\zeta_g$ s'obtient à partir de $\zeta_f$ par : - contraction vertical si $0 < k < 1$ - étirement vertical si $k > 1$	- Si $k > 0$ , $f$ et $kf$ ont même sens de variation sur $I$ - si $k < 0$ , $f$ et $kf$ ont des sens variation contraire sur $I$
Cas particulier ou $k = 1$ $g : x \rightarrow -f(x)$	$\zeta_g$ s'obtient à partir de $\zeta_f$ par symétrie par rapport à l'axe $(ox)$	$f$ et $(-f)$ ont des sens de variation contraires sur $I$



$g : x \rightarrow  f(x) $	$\zeta_g$ coïncide avec de $\zeta_f$ lorsque $f(x) \geq 0$ et si $f(x) \leq 0$ , $\zeta_g$ est la symétrie de $\zeta_f$ par rapport à $(ox)$	
$g : x \rightarrow f(-x)$	La courbe $\zeta_g$ est l'image de la courbe $\zeta_f$ par symétrie orthogonal d'axe $(oy)$	

$f$  Définie un intervalle  $I$ ,  $a$  un réel et on se place dans  $R(o, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé du plan

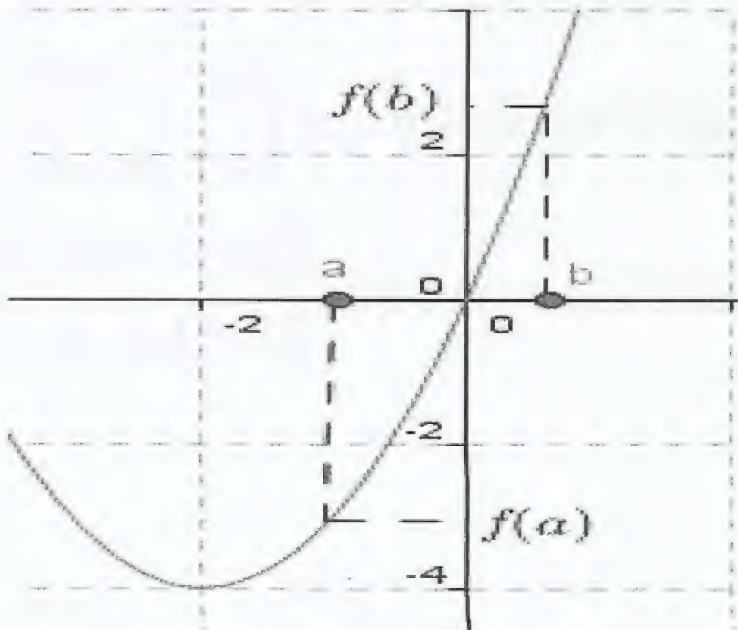
**Remarque :**

Si $f$ et $g$ sont définis sur $I$ , Que dire de $(f+g)$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Si <math>f</math> et <math>g</math> sont croissantes, <math>(f+g)</math> l'est aussi</li> <li>- Si <math>f</math> et <math>g</math> sont décroissantes, <math>(f+g)</math> l'est aussi sinon on ne sait pas</li> </ul>
<p>On ne peut rien dire en général sur le produit <math>f.g</math> (ni sur le quotient <math>\frac{f}{g}</math>)</p> <p>(contre-exemple : <math>f(x) = x</math> et <math>g(x) = \frac{1}{x}</math>)</p>	

**C) Sens de variation d'une fonction :**

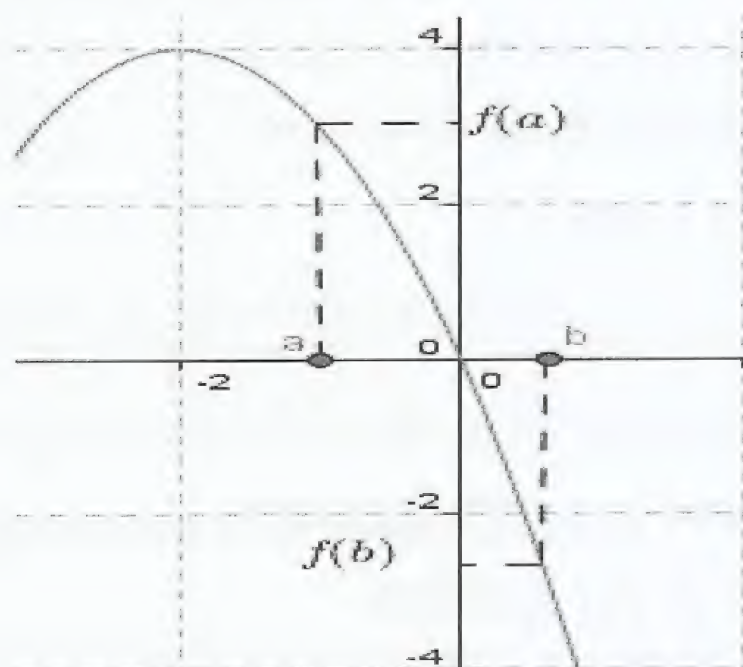
Soit  $f$  une fonction défini sur un intervalle  $I$ .

- Dire que  $f$  est strictement croissante sur  $I$  signifie  $f$  conserve l'ordre c'est-à-dire que pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $I$  :  $a < b$  signifie  $f(a) < f(b)$ .





- Dire que  $f$  est strictement décroissante sur  $I$  signifie que  $f$  inverse l'ordre, c'est-à-dire que pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $I$  :  $a < b$  signifie  $f(a) > f(b)$ .



**Application : Encadrement d'une fonction avec les variations :**

Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ .

- Une fonction strictement croissante conserve l'ordre donc : si  $a \leq x \leq b$  alors  $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$
- Une fonction strictement décroissante conserve l'ordre donc : si  $a \leq x \leq b$  alors  $f(a) \geq f(x) \geq f(b)$

**D) Fonction polynôme de degré deux :**

La fonction polynôme de degré deux est la forme :  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , ou  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des réels,  $a \neq 0$ . Cette expression de  $f$  est la forme développée de  $f$

**Propriété :**

Soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , avec  $a \neq 0$ . Il existe  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels tels que  $f(x) = a(x + \alpha)^2 + \beta$

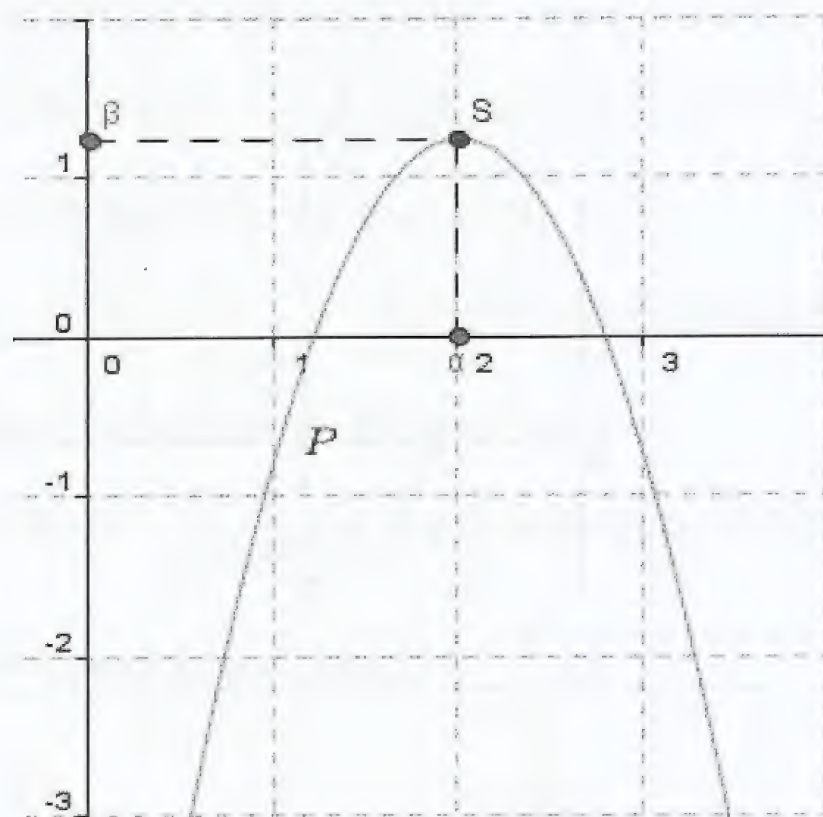
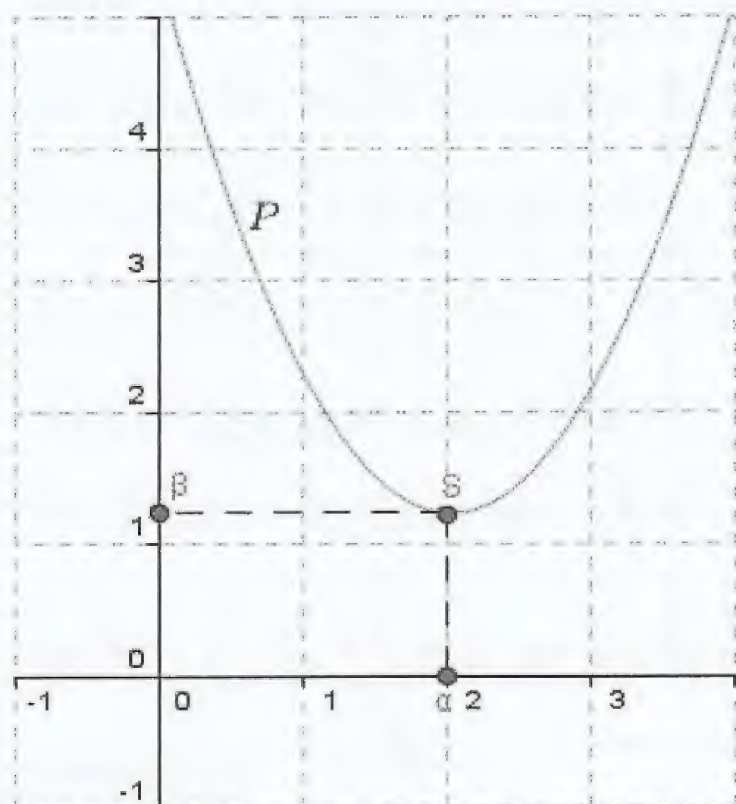
$$\text{avec } \begin{cases} \alpha = -\frac{b}{2a} \\ \beta = f(\alpha) \end{cases}$$

Cette expression est la forme canonique de  $f$ . La représentation graphique de  $f$  est une parabole  $(P)$  de sommet  $S(\alpha, \beta)$

Si  $a > 0$ ,  $(P)$  est orienté vers le haut c'est-à-dire que  $\begin{cases} \text{Sur } ]-\infty; \alpha[ & f \text{ est décroissante} \\ \text{Sur } ]\alpha; +\infty[ & f \text{ est croissante} \end{cases}$

Si  $a < 0$ ,  $(P)$  est orienté vers le bas c'est-à-dire que  $\begin{cases} \text{Sur } ]-\infty; \alpha[ & f \text{ est croissante} \\ \text{Sur } ]\alpha; +\infty[ & f \text{ est décroissante} \end{cases}$





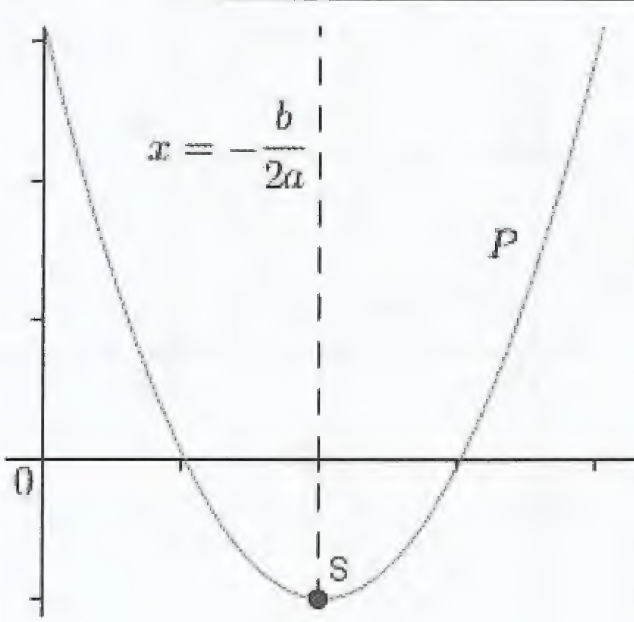
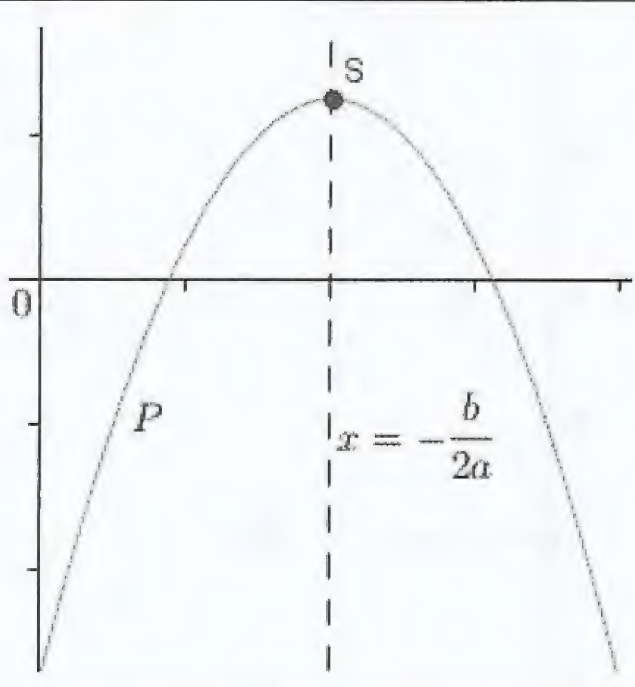
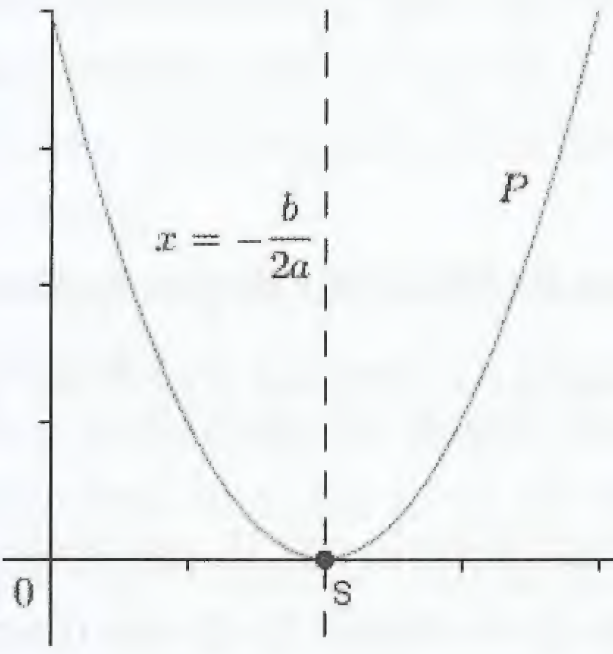
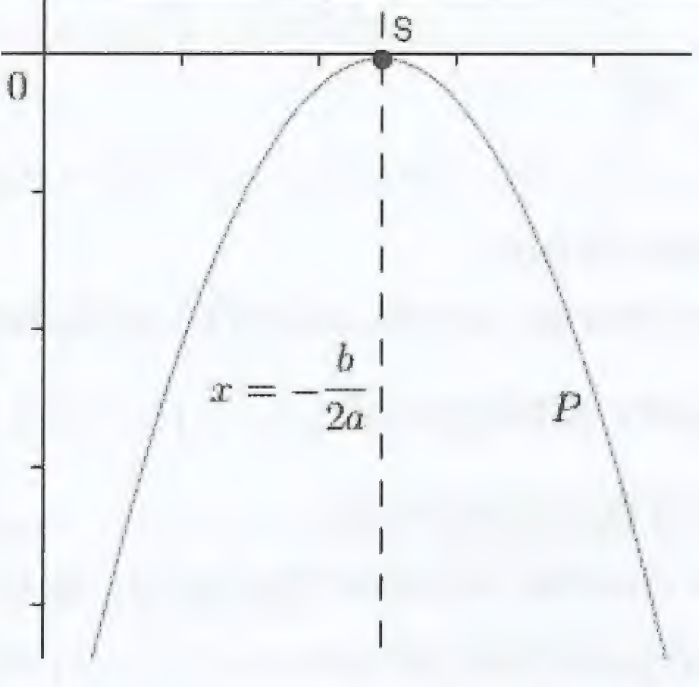
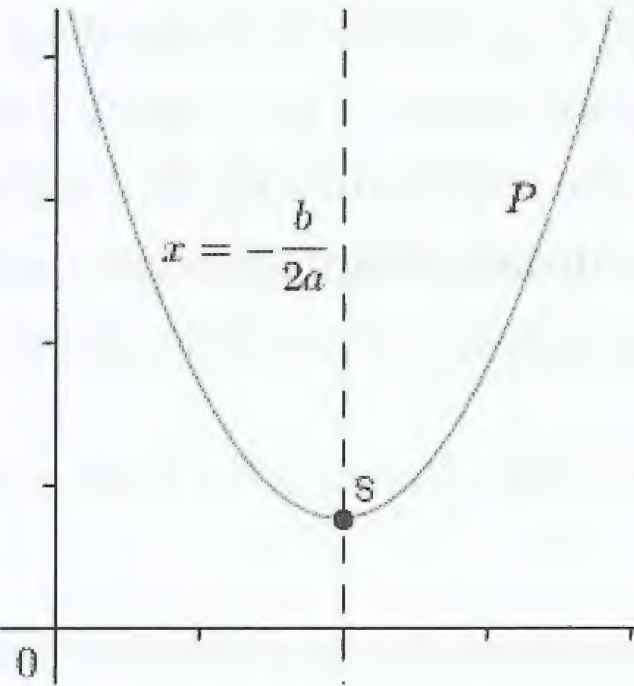
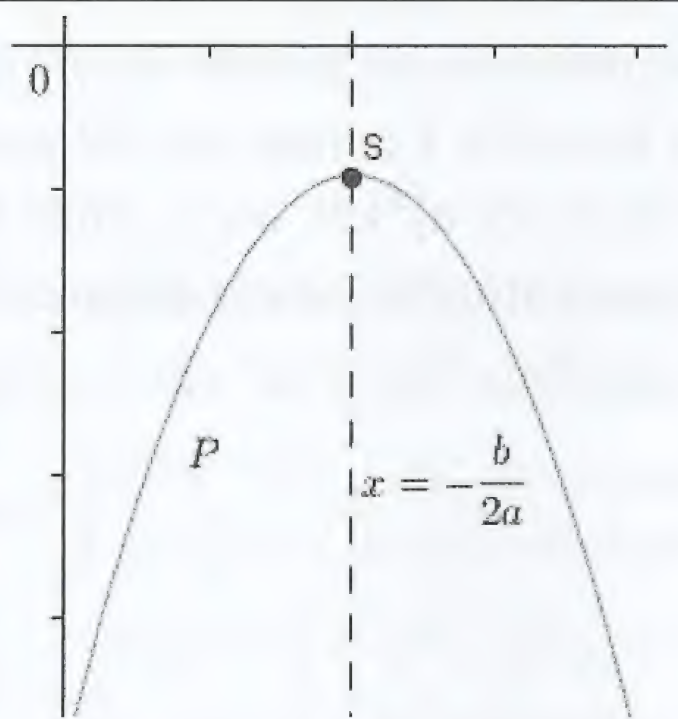
### E) Parabole :

- La courbe représentative de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x)=ax^2$ ,  $a \neq 0$ , dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est une parabole de sommet  $O$  et d'axe de symétrie la droite d'équation  $x=0$
- La courbe représentative de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x)=a(x-\beta)^2$ ,  $a \neq 0$  est une parabole de sommet  $S(a,0)$  et d'axe de symétrie la droite d'équation  $x=a$
- La courbe représentative de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x)=x^2+\beta$ ,  $a \neq 0$  est une parabole de somme  $S(a,\beta)$  et d'axe de symétrie la droite d'équation  $x=0$
- La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x)=ax^2+bx+c$ ,  $a \neq 0$ , peut s'écrire sous la forme  $f(x)=a(x-a)^2+\beta$ ,  $a \neq 0$ , donc la courbe représentative de  $f$  est une parabole de sommet  $S(a,\beta)$  et d'axe de symétrie la droite d'équation  $x=a$ .

Soit le trinôme  $T(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a$  non nul.





	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta < 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta > 0$		



### F) Hyperbole :

- La courbe représentative de la fonction  $f(x) = \frac{a}{x}, a \neq 0$  est une hyperbole de centre O et d'asymptotes les droites d'équations  $x=0$  et  $y=0$
- La courbe représentative de la fonction  $f(x) = \frac{1}{x} + \beta$  est une hyperbole de centre  $I(0, \beta)$  et d'asymptotes les droites d'équations  $x=0$  et  $y = \beta$
- La courbe représentative de la fonction  $f(x) = \frac{a}{x+a}, a \neq 0$  est une hyperbole de centre  $I(-a, 0)$  et d'asymptotes les droites d'équations  $x=-a$  et  $y=0$
- La courbe représentative de la fonction  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, c \neq 0$  est une hyperbole de centre  $I\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$  et d'asymptotes les droites d'équations  $x = -\frac{d}{c}$  et  $y = \frac{a}{c}$

## II) Exercices

### 1/ Q-C-M

1) Soit  $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

- La représentation de  $f$  est une parabole de sommet  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
- $\Delta : y = \frac{1}{2}$  est un axe de symétrie
- $f(3) = 12,5$

2) Soit  $g(x) = -3x^2 + 2x - 1$

- $g(x) = -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{2}{3}$
- La représentation de  $g$  est une parabole de sommet  $S\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$
- $\Delta : x = \frac{1}{3}$  est un axe de symétrie

3) Soit  $h(x) = \frac{ax+b}{x-1}$

- $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- Pour  $a = 2$  et  $b = -1$  les points  $E(2, 3)$  et  $F\left(-2, \frac{5}{3}\right)$  appartient à la courbe de  $h$



4) Soit  $K$  une fonction telle que :  $3K(-x) + K(x) = 4x^3 + 2x$

- $K$  est une fonction paire
- $K$  est une fonction impaire

5) Soit  $T(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$  et  $F(x) = \frac{1}{2}x^2$

- $\zeta_F = t_{2\vec{j}}(\zeta_1)$  avec  $\zeta_1 = S_{(ox)}(\zeta_T)$
- $\zeta_F = t_{2\vec{j}}(\zeta_T)$
- $\zeta_F = t_{2\vec{i}}(\zeta_1)$  avec  $\zeta_1 = S_{(ox)}(\zeta_T)$

## 2 APPLIQUER

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Soit les fonctions :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 + x - 1 \quad \text{et} \quad x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}$$

- 1) Montrer que  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  sont deux paraboles dont on précisera leurs axes et leurs sommets.
- 2) Tracer dans le même repère  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$

## 3 APPLIQUER

Soit  $P$  la parabole d'équation  $y = 2x^2$

- 1) Tracer  $P$ .
- 2) Résoudre graphiquement les inéquations :
  - a)  $2x^2 < 2$
  - b)  $2x^2 \geq 8$
  - c)  $2x^2 \leq -1$
  - d)  $2 \leq 2x^2 \leq 8$

## 4 APPLIQUER

Dans chacun des cas suivants, déterminer le sommet et l'axe de la parabole  $P$  puis la construire

- a)  $P : y = x^2 - 2x$
- b)  $P : y = \frac{1}{2}x^2 + 2x$
- c)  $P : y = -x^2 + x + 3$



## 5 S'ENTRAINER

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

1. Etudier  $f$  et tracer sa courbe représentative  $\zeta$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

2. a) Construire sur le même graphique la droite D d'équation  $y = \frac{1}{2}x + 3$

b) Calculer les coordonnées des points d'intersection de  $\zeta$  et la droite D.

c) Résoudre graphiquement puis par le calcul l'inéquation :  $x^2 - x \geq 6$

3. On donne  $g(x) = \inf\left(\frac{1}{2}x^2, \frac{1}{2}x + 3\right)$

Construire dans le même repère et avec une autre couleur la courbe représentative de  $g$ .

4. Soit A ( 0 , 2 ) et M un point de  $\zeta$  d'abscisse  $\alpha$  appartenant à  $[0, 2]$ .

On désigne par H le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées et K le point tel que MHAK soit un rectangle.

a) Calculer le périmètre du rectangle en fonction de  $\alpha$ .

b) Pour quelle valeur de  $\alpha$  le périmètre est maximal.

## 6 S'ENTRAINER

On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \frac{1}{2}x^2$

1. Tracer  $\zeta_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

2. Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$ .

a) Vérifier que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2$ .

b) Tracer  $\zeta_g$  à partir de  $\zeta_f$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

3. Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 2|x| + 2$ .

a) Montrer que  $h$  est une fonction paire.

b) Tracer  $\zeta_h$  à partir de  $\zeta_g$ .

c) Dédurre le tableau de variation de  $h$ .



4. Déterminer, graphiquement, l'ensemble des réels  $m$ , pour lesquels l'équation  $h(x) = m$  admet quatre solutions.

## 7 S'ENTRAINER

- 1) On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$ .

Tracer  $\zeta_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 2) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ .

a) Vérifier que pour tout réel  $x$ , on a :  $g(x) = f(x) - 2$ .

b) Tracer alors  $\zeta_g$ , à partir de  $\zeta_f$ , dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Préciser sa nature et ses éléments caractéristiques.

c) Calculer les coordonnées des points A et B intersection de  $\zeta_g$  avec l'axe des abscisses.

d) Résoudre graphiquement, puis par le calcul, l'inéquation :  $f(x) > 2$ .

- 3) Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = |g(x)|$ .

a) Tracer  $\zeta_h$ , à partir de  $\zeta_g$ .

b) Dédire le tableau de variation de  $h$ .

c) Déterminer, graphiquement, l'ensemble des réels  $m$ , pour lesquels l'équation  $|g(x)| = m$  admette deux solutions.

4) On désigne par S le sommet de  $\zeta_g$  et par S' celui de  $\zeta_h$ . Quelle est la nature du quadrilatère SAS'B.

## 8 S'ENTRAINER

$R = (O, \vec{i}, \vec{j})$  étant un repère orthonormé du plan.

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = 1 + \frac{2}{x-3}$ .

- 1) Etudier  $f$  et construire sa courbe représentative H dans le repère R.

- 2) Soit I(3, 1) et le repère  $R' = (I, \vec{i}, \vec{j})$ , Ecrire une équation de H dans R'.



3) Résoudre graphiquement  $\left| \frac{x-1}{x-3} \right| \geq x-1$ .

4) Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = 1 + \frac{2}{|x|-3}$ .

a) Déterminer le domaine de définition de  $g$ .

b) Montrer que  $g$  est paire. Déduire de  $H$  la courbe représentative de  $g$ .

c) Dresser à partir de sa courbe, le tableau de variation de  $g$ .

5) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :

$$(m-1)|x| = 3m-1, m \in \mathbb{R}.$$

9

### SEPERFECTIONNER

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies pour tout réel  $x$  par :  $f(x) = x^2$  et  $g(x) = x^3$ . On notera  $(C_f)$  et  $(C_g)$  les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) déterminer les coordonnées des points d'intersection de  $(C_f)$  et  $(C_g)$

2) a) Tracer un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , ainsi que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x+3$ .

b) Déterminer graphiquement les valeurs approchées des abscisses des points d'intersection de  $(C_f)$  et  $(D)$

c) Développer  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$

d) Etablir alors les valeurs exactes des points d'intersection de  $(C_f)$  et  $(D)$

3)  $A$  est un point de  $(C_g)$  d'abscisse 1 et  $B$  est un point de  $(C_g)$  d'abscisse 2.

a) Déterminer les coordonnées des points  $A$  et  $B$ .

b) Déterminer une équation de la droite  $(AB)$

4) On va montrer que la droite  $(AB)$  coupe  $(C_g)$  en un troisième point  $C$  dont on veut déterminer les coordonnées.

a) montrer que pour trouver les coordonnées de  $C$  on est amené à résoudre l'équation :  $(x+3)(x-2)(x-1) = 0$

b) Déterminer alors les coordonnées de  $C$ .



10

SEPERFECTIONNER

Soit  $f$  une fonction définie pour tout réel par :  $f(x) = ax^2 + bx + c$

On désigne par  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) Déterminer les coefficients réels  $a, b$  et  $c$  tels que  $(C_f)$  passe par le point  $A(2; 10)$ , coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse  $-3$  et coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée  $-6$

2) On considère la fonction  $g$  définie pour tout  $x$  réel par :  $g(x) = 2x^2 + 4x - 6$

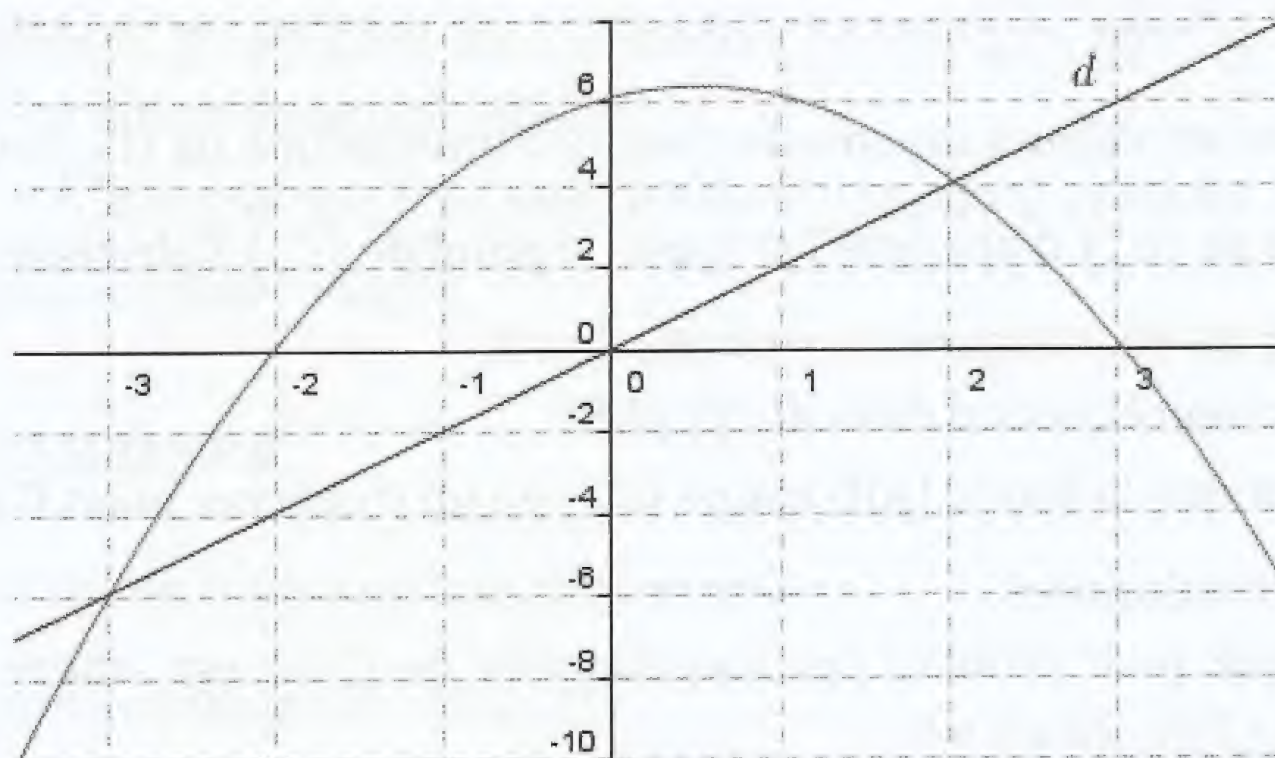
On désigne par  $(C_g)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  ;

Soit  $(D)$  la droite d'équation  $y = 3x - 3$ . Déterminez le(s) point(s) d'intersection de  $(D)$  de  $(C_g)$

11

SEPERFECTIONNER

Dans le repère ci-dessous, on considère la parabole représentant la fonction :  $x \mapsto ax^2 + bx + c$ , ainsi que la droite  $d$  d'équation  $y = mx + p$



On définit la fonction  $f$  par :  $f(x) = \frac{mx + p}{ax^2 + bx + c}$

1) Quel est l'ensemble de définition de  $f$  ?

2) Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = 1$ .



12

**SEPERFECTIONNER**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $R = (O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soit la fonction  $f$  définie sur

$$\mathbb{R} / \{1\} \text{ par : } f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

1) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R} / \{1\} : f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$

2) Etudier les variations de  $f$ .

3) Tracer  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe représentative de la fonction  $f$ .

4) Soit  $A(1,2)$  et  $R' = (A; \vec{i}, \vec{j})$ . Ecrire l'équation de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  dans le repère  $R'$ .

5) On désigne par  $A, B$  et  $C$  trois points de  $(\mathcal{C}_f)$  d'abscisses respectives  $a, b$  et  $c$

$$a, b, c \in \mathbb{R} / \{1\}$$

On note  $H$  l'orthocentre du triangle  $ABC$ .

a) Déterminer en fonction de  $a, b$  et  $c$  les équations des hauteurs  $(AH)$  et  $(BH)$

b) En déduire que  $H \in (\mathcal{C}_f)$

6) Soit  $(D_m)$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , la droite d'équation :  $y = x + m$ .

a) Déterminer l'ensemble  $\Gamma$  des réels  $m$  tels que  $(D_m)$  coupe  $(\mathcal{C}_f)$  en deux points distincts  $M_1$  et  $M_2$

b) Soit  $m \in \Gamma$ . On pose :  $I_m = M_1 * M_2$ . Déterminer l'ensemble des points  $I_m$  lorsque  $m$  varie sur  $\Gamma$

7) Soit la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R} / \{1, -1\}$  par  $h(x) = \frac{1}{|x|-1}$

a) Expliquer comment tracer  $(\mathcal{C}_h)$  à partir de  $(\mathcal{C}_f)$

b) Donner les variations de  $h$  graphiquement.

8) Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R} / \{2\}$  par  $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$ . On note par  $(\mathcal{C}_g)$  sa courbe

représentative dans le repère  $\mathbb{R}$ . Etablir que :  $(\mathcal{C}_g) = S_{(D_0)}((\mathcal{C}_f))$ .

13

**SEPERFECTIONNER**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 - x + 2$

1) Etudier  $f$  et tracer  $C_f$  dans un repère orthonormé  $R(O, \vec{i}, \vec{j})$

2) soit  $C_g : y = x^2 + 1$  et  $\Delta : y = x - 1$





- a) Tracer  $C_g$  et  $\Delta$  dans un autre repère orthonormé
- b) Soit  $M(x,y)$  un point quelconque de  $C_g$ , calculer  $d(M, \Delta)$  en fonction de  $x$ .
- c) En déduire les coordonnées de point  $M$  de  $C_g$  le plus proche de  $\Delta$ .

**SEPERFECTIONNER**

Le plan est un repère orthonormé  $R(O, \vec{i}, \vec{j})$

Soit  $A(1,0)$  ;  $B(-1,0)$

1) Déterminer l'ensemble  $\Gamma = \{M(x,y) \text{ tel que } MA^2 + MB^2 = 4\}$

2) Soit la fonction  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow \sqrt{1-x^2}$$

a) Etudier la parité de  $f$ .

b) Montrer que  $\Gamma = Cf \cup S_{(O,\vec{i})}(Cf)$ .

c) Tracer alors  $Cf$

3)  $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow \frac{1}{2x}$$

a) Déterminer l'intersection de  $Ch$  et  $Cf$

b) Etudier  $h$  et tracer  $Ch$

c) Résoudre graphiquement  $2\sqrt{1-x^2} < \frac{1}{2x}$



## 1 Q-C-M

- 1) vrai - faux - vrai 2) vrai - faux - vrai 3) faux - vrai 4) faux - vrai 5) vrai - faux - faux

## 2 APPLIQUER

1) On a :  $f(x) = x^2 + x - 1$

$$= \left( x^2 + 2 \times \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4} - 1 = \left( x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{5}{4}$$

Soit  $\mathcal{C}_1$  la courbe de la fonction  $x \rightarrow \left( x + \frac{1}{2} \right)^2$ .

$\mathcal{C}_1$  est une parabole de sommet  $S_1 \left( -\frac{1}{2}, 0 \right)$  et d'axe

$$\Delta_1 : x = -\frac{1}{2} \cdot \mathcal{C}_f = t_{\frac{5}{4}}(\mathcal{C}_1)$$

Donc  $\mathcal{C}_f$  est une parabole de sommet  $S \left( -\frac{1}{2}, -\frac{5}{4} \right)$

et d'axe  $\Delta_1 : x = -\frac{1}{2}$

De même on a :  $g(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x) - \frac{1}{2}$

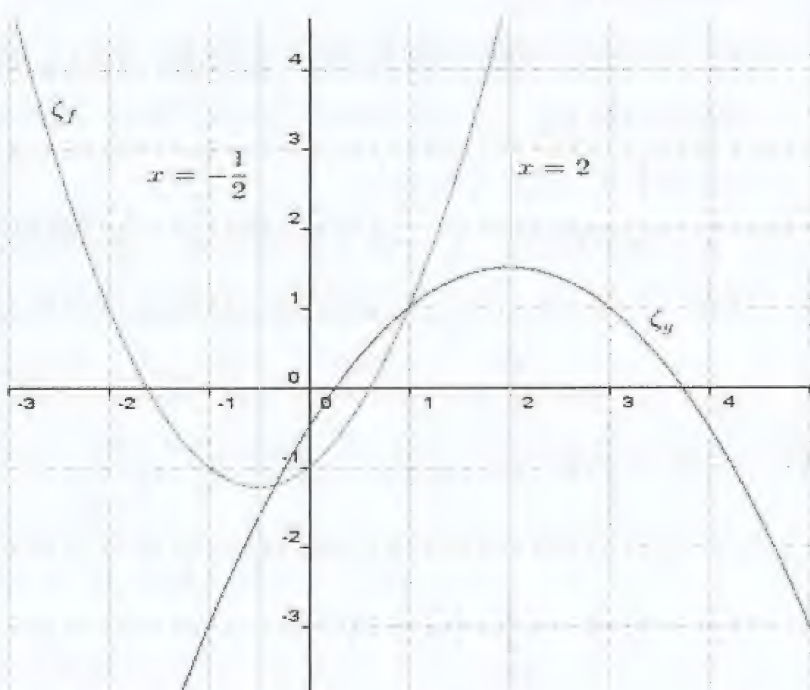
$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 2 \times 2x + 4 - 4) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + \frac{3}{2}$$

$\mathcal{C}_g = t_{\frac{3}{2}}(\mathcal{C}_2)$  et  $\mathcal{C}_2$  est la parabole de sommet

$S_2(2, 0)$  et d'axe  $\Delta_2 : x = 2$ . Donc  $\mathcal{C}_g$  est une

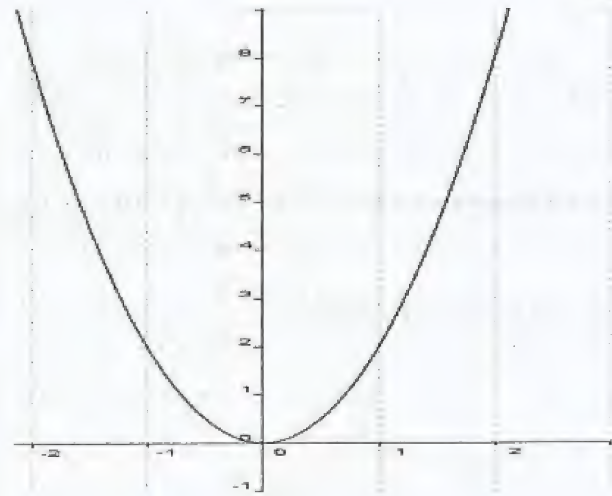
parabole de sommet  $S \left( 2, \frac{3}{2} \right)$  et d'axe  $\Delta_2 : x = 2$

2)



## 3 APPLIQUER

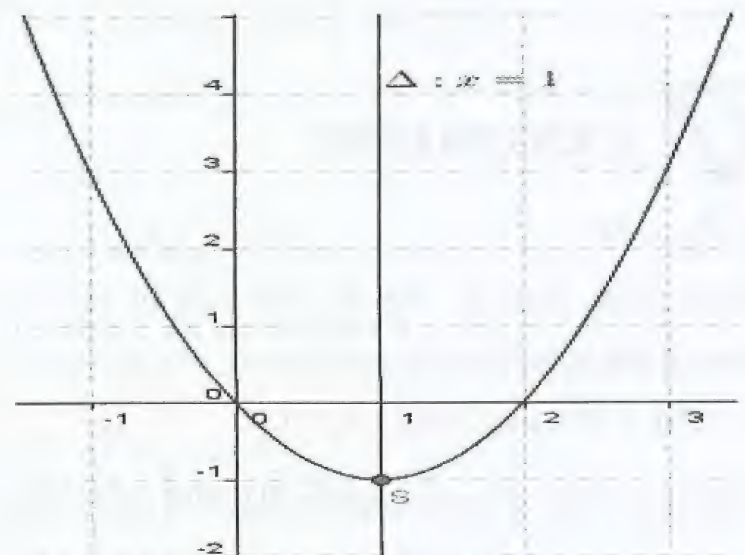
1) Voir figure



2) Graphiquement :

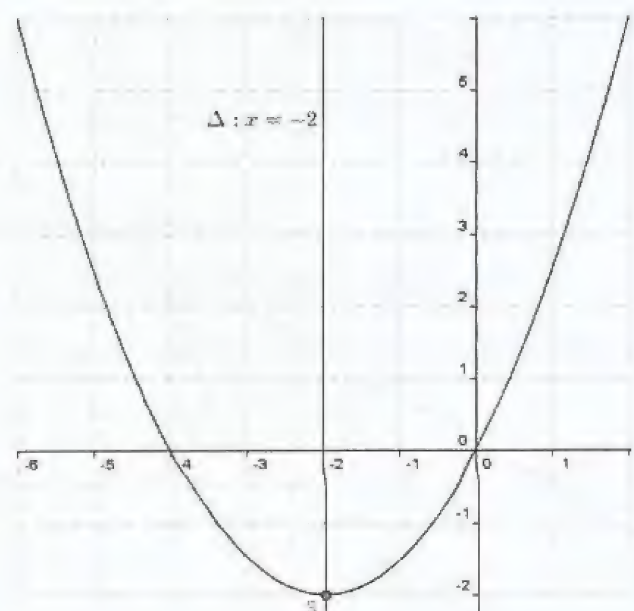
- a)  $2x^2 < 2$  c'est l'intervalle  $] -1, 1[$   
 b)  $2x^2 \geq 8$  c'est  $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$   
 c)  $2x^2 \leq -1$  c'est l'ensemble vide  
 d)  $2 \leq 2x^2 \leq 8$  c'est  $[-2, -1] \cup [1, 2]$

## 4 APPLIQUER



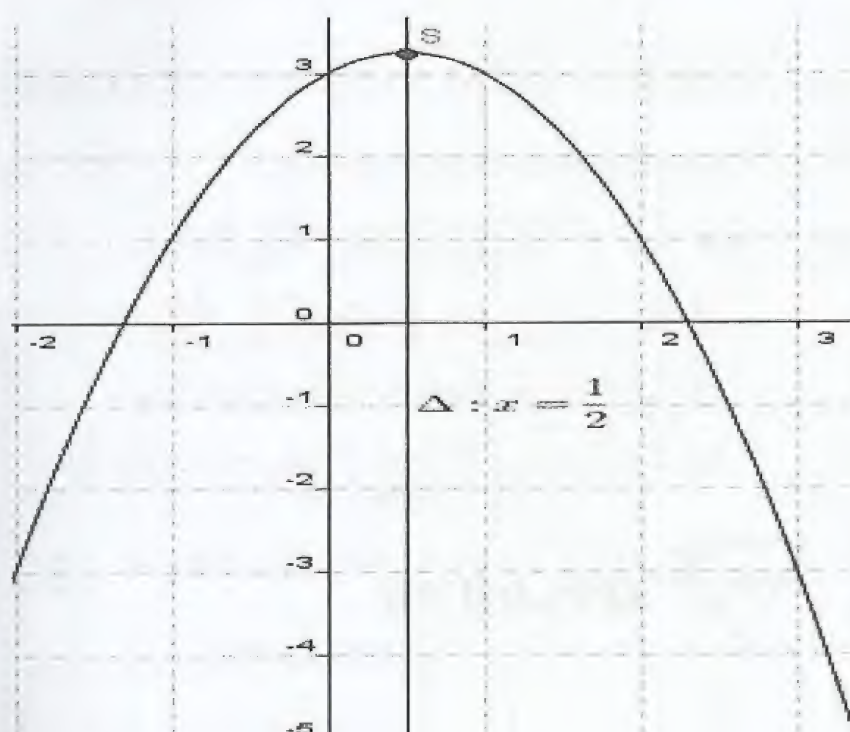
a)  $P : y = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$  est une parabole de sommet  $S(1, -1)$  et d'axe de symétrie la droite d'équation  $x = 1$ .

b)  $P : y = \frac{1}{2}x^2 + 2x = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 2$  est une parabole de sommet  $S(-2, -2)$  et d'axe de symétrie la droite d'équation  $x = -2$ .





c)  $P : y = -x^2 + x + 3 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$  est une parabole de sommet  $S\left(\frac{1}{2}, \frac{13}{4}\right)$  et d'axe de symétrie la droite d'équation  $x = \frac{1}{2}$ .



## 5 S'ENTRAINER

1.  $D_f = \mathbb{R}$

Pour tout réel  $x$ , on a :  $-x \in \mathbb{R}$  et  $f(-x) = f(x)$  donc  $f$  est une fonction paire.

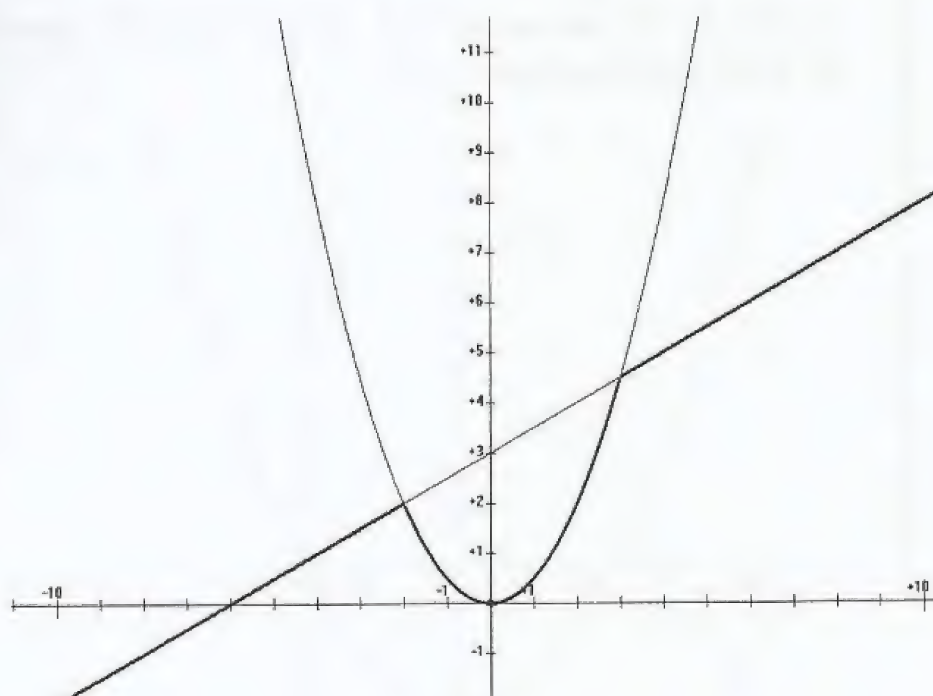
Il suffit d'étudier  $f$  sur  $[0, +\infty[$ .

Soient  $a$  et  $b$  deux réels de  $[0, +\infty[$  tels que :  $a < b$

$$\Rightarrow a^2 < b^2 \Rightarrow \frac{1}{2}a^2 < \frac{1}{2}b^2 \Rightarrow f(a) < f(b)$$

Ainsi  $f$  est croissante sur  $[0, +\infty[$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$



$x$	0	$+\infty$
$f$	0	$+$

1) a) Pour tracer  $D$  il suffit de prendre le tableau de valeurs suivants :

$x$	0	-6
$y$	3	0

b)  $M(x, y) \in C_f \cap D$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = \frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 = x + 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Delta = 25 \Rightarrow x = \frac{1-5}{2} = -2 \text{ ou } x = \frac{1+5}{2} = 3.$$

Ainsi,  $C_f \cap D = \{A(-2, 2); B(3, \frac{9}{2})\}$ .

c)  $x^2 - x \geq 6$ .

\* Résolution graphique :

$$x^2 - x \geq 6 \Leftrightarrow x^2 \geq x + 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 \geq \frac{1}{2}x + 3$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq y_D.$$

$S_{\mathbb{R}} = \{\text{les abscisses des points de } C_f \text{ situés au dessus de } D\}.$

$$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[.$$

\*. Par le calcul :  $x^2 - x \geq 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 \geq 0$

$x$	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x^2 - x - 6$	+	0	- 0	+

$$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[.$$

$$3. g(x) = \inf\left(\frac{1}{2}x^2, \frac{1}{2}x + 3\right)$$





$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 3 & \text{si } x \in ]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[ \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{si } x \in [-2, 3] \end{cases}$$

4. a) Soit P le périmètre du rectangle MHAK  
 $\Rightarrow P = 2(MH + AH)$

$$= 2\left(\alpha + 2 - \frac{1}{2}\alpha^2\right) = -\alpha^2 + 2\alpha + 4.$$

b) Soit M la valeur maximale de P  $\Rightarrow P \leq M$   
 $\Rightarrow -\alpha^2 + 2\alpha + 4 \leq M$  pour tout réel  $\alpha \in [0, 2]$ .  
 $\Rightarrow -\alpha^2 + 2\alpha + 4 - M \leq 0$  pour tout réel  $\alpha \in [0, 2]$ .  
 $\Rightarrow \Delta' = 1 + 4 - M = 0 \Rightarrow M = 5$  et  $\alpha = 1$ .

6

## S'ENTRAINER

2. a)  $\frac{1}{2}(x+2)^2 = \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$

b)  $g(x) = f(x+2) \Rightarrow C_g = t_{-2i}(C_f)$

En effet soit  $M(x, y) \in C_f$

et  $M'(x', y') = t_{-2i}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = -2\vec{i}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = -2 \\ y' - y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y \end{cases}$$

$$g(x') = g(x-2) = f(x-2+2) = f(x) = y = y'$$

$$\Rightarrow M' \in C_g.$$

$C_g$  est une parabole de sommet  $S(-2, 0)$  et d'axe de symétrie la droite d'équation  $x = -2$ .

3) a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $-x \in \mathbb{R}$

$$\text{et } h(-x) = \frac{1}{2}(-x)^2 - 2|-x| + 2 = \frac{1}{2}x^2 - 2|x| + 2 = h(x)$$

$\Rightarrow h$  est paire.

b)  $C_h$  est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Pour tout réel  $x \in ]-\infty, 0]$ ,

$$\text{on a : } h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 = g(x)$$

$\Rightarrow C_h = C_g$  sur  $]-\infty, 0]$  sur  $[0, +\infty[$ , on complète par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées.

c)

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
h	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$
			0		0

4) L'équation  $h(x) = m$  admet quatre solutions lorsqu'une droite horizontale coupe  $C_h$  en 4 points, c'est-à-dire lorsque  $m \in ]0, 2[$ .

7

## S'ENTRAINER

2. b)  $g(x) = f(x) - 2 \Rightarrow C_g = t_{-2j}(C_f)$ .

En effet soit  $M(x, y) \in C_f$  et

$$M'(x', y') = t_{-2j}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = -2\vec{j}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = 0 \\ y' - y = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y - 2 \end{cases}$$

$$g(x') = g(x-2) = f(x-2+2) = f(x) = y = y'$$

$$\Rightarrow M' \in C_g.$$

$C_g$  est une parabole de sommet  $S(1, -2)$  et d'axe de symétrie la droite d'équation  $x = 1$ .

c)  $M(x, y) \in C_g \cap (x'x) \Leftrightarrow \begin{cases} y = g(x) \\ y = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 3$$

$$\Rightarrow C_g \cap (x'x) = \{A(-1, 0); B(3, 0)\}$$

d)  $f(x) > 2 \Leftrightarrow f(x) - 2 > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0$

\* Graphiquement :

$S_{\mathbb{R}} = \{\text{les abscisses des points de } C_g \text{ situés strictement au dessus de l'axe des abscisses}\}$

$$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty, -1[ \cup ]3, +\infty[.$$

\* Par le calcul :



$$f(x) > 2 \Leftrightarrow f(x) - 2 > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0.$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$	+	0	- 0	+

$$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty, -1[ \cup ]3, +\infty[.$$

$$4. h(x) = |g(x)| =$$

$$\begin{cases} g(x) & \text{si } x \in ]-\infty, -1[ \cup ]3, +\infty[ \\ -g(x) & \text{si } x \in [-1, 3] \end{cases}$$

$$C_h = C_g \text{ sur } ]-\infty, -1[ \cup ]3, +\infty[ \text{ et } C_h = S_{(x,x)}(C_g) \text{ sur } [-1, 3].$$

b)

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$3$	$+\infty$
H	$+\infty$ ↘ 0		↗ 2 ↘ 0		↗ +c

c) L'équation  $h(x) = m$  admet deux solutions lorsqu'une droite horizontale d'équation  $y = m$  coupe  $C_h$  en deux points. C'est-à-dire lorsque  $m \in ]0, 2[$ .

$$4. S(1, -2); S'(1, 2); A(-1, 0) \text{ et } B(3, 0)$$

$$SA = \sqrt{(-1-1)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = AS' = S'B = BS \Rightarrow SAS'B \text{ est un losange.}$$



### S'ENTRAINER

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x-3}.$$

$$1. D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\} = ]-\infty, 3[ \cup ]3, +\infty[$$

\* Variations de  $f$  sur  $]-\infty, 3[$  :

Soient  $a$  et  $b$  deux réels de  $]-\infty, 3[$  tels que :

$$a < b \Leftrightarrow a-3 < b-3 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a-3} > \frac{1}{b-3}$$

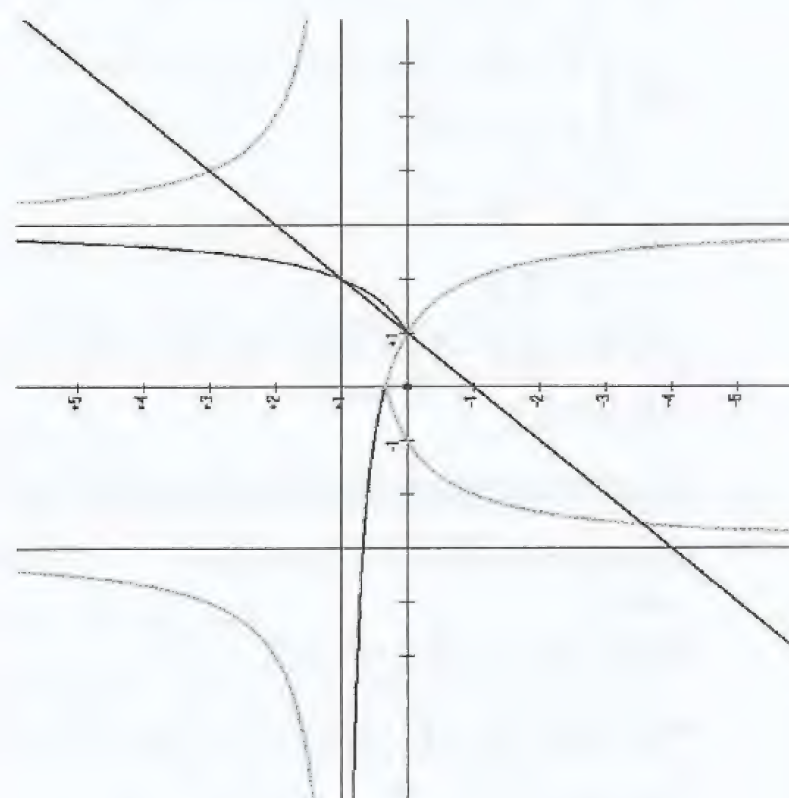
$$\Leftrightarrow \frac{2}{a-3} > \frac{2}{b-3} \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{a-3} > 2 + \frac{2}{b-3} \Leftrightarrow f(a) > f(b).$$

Ainsi  $f$  est décroissante sur  $]-\infty, 3[$ .

\* Il en est de même pour les variations de  $f$  sur  $]3, +\infty[$ .

$x$	$-\infty$	$3$	$+\infty$
$f$	1 ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ 1

\* Traçage de  $C_f$  :



$$2. \text{ Soit } I(3, 1). M(X, Y)_{(i, j)}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{(i, j)} \text{ or } \overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix}_{(i, j)}$$

$$H : y = 1 + \frac{2}{x-3} \text{ dans le repère } (O, \vec{i}, \vec{j})$$



$$\Rightarrow H : Y = \frac{2}{X} \text{ dans le repère } (I, \vec{i}, \vec{j}).$$

H est une hyperbole ayant pour asymptotes les droites  $(I, \vec{i}) : y = 1$  et  $(I, \vec{j}) : x = 3$  et pour centre de symétrie le point I.

$$3. |f(x)| \geq x - 1 ; S_{\mathbb{R}} = ]-\infty, 1] \cup [2, 3[.$$

$$4. a) g(x) = f(|x|). x \in D_g \Leftrightarrow |x| - 3 \neq 0 \\ \Leftrightarrow |x| \neq 3 \Leftrightarrow x \neq 3 \text{ et } x \neq -3 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}.$$

b) Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ ,  $-x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$   
et  $g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$  donc g est paire  
c)

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
sg	$+\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
	1	-	-	-	1

$$5. (m-1)|x| = 3m-1 \Leftrightarrow \frac{|x|-1}{|x|-3} = m \Leftrightarrow g(x) = m$$

m	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
Nombre de solutions de l'équation $g(x) = m$	2		0	2

## 9 SE PERFECTIONNER

Les abscisses des points d'intersection de  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{C}_g)$  sont solutions de l'équation  $f(x) = g(x)$ .

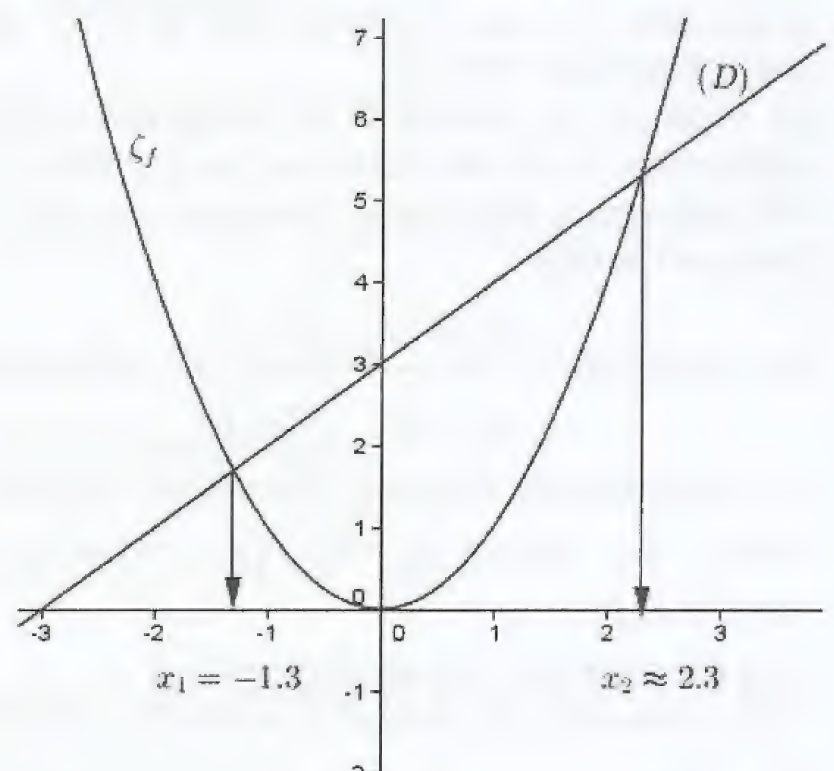
$$\text{Or pour tout réel } x, f(x) = g(x) \\ \Leftrightarrow x^2 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x^2(1-x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \\ \text{ou } 1-x \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Les points d'intersection de  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{C}_g)$  sont donc  $M(0; f(0) = g(0) = 0)$  et  $N(1; f(1) = g(1) = 1)$

2)a) la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  ainsi que la droite (D)

d'équation  $y = x + 3$  sont tracées page suivante

b) Graphiquement, les valeurs approchées des abscisses des points d'intersection de  $(\mathcal{C}_f)$  et (D) sont respectivement égales à  $x_1 \approx -1.3$  et  $x_2 = 2.3$



c) pour tout réel x,

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} = x^2 - 2 \times x \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} \\ = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{13}{4} = x^2 - x - \frac{12}{4} = x^2 - x - 3$$

d) les abscisses des points d'intersection de  $(\mathcal{C}_f)$  et (D) sont solutions de l'équation  $f(x) = x + 3$ . Or, pour tout réel x,

$$f(x) = x + 3 \Leftrightarrow x^2 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right) = 0$$

d'après la règle du produit nul, on aura donc

$$x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \\ \text{ou } x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Les points d'intersection de  $(\mathcal{C}_f)$  et (D) ont donc

$$\text{pour abscisse } x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \text{ et } x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$$





3)a) Puisque A est un point de  $(C_g)$  d'abscisse 1,

son ordonnée est  $g(1) = 1^3 = 1$  le point A est

donc A(1;1). Puisque B est un point de  $(C_g)$

d'abscisse 2, son ordonnée est  $g(2) = 2^3 = 8$ . Le point B est donc B(2;8)

b) Puisque les points A et B ont des abscisses différentes. La droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Elle admet donc une équation de la forme  $y = mx + p$ .

$$\text{On calcule } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8 - 1}{2 - 1} = 7 \text{ Ainsi } y = 7x + p$$

Les coordonnées du point A vérifiant l'équation de (AB), on aura  $y_A = 7x_A + p \Leftrightarrow p = y_A - 7x_A = 1 - 7 = -6$

Une équation de (AB) est donc  $y = 7x - 6$

4)a) L'abscisse du point C intersection de (AB) et  $(C_g)$  est solution de l'équation. On développe

$$\text{pour tout réel } x : (x+3)(x-2)(x-1) = (x^2 - 2x + 3x - 6)(x-1)$$

$$= (x^2 + x - 6)(x-1) = x^3 - x^2 + x^2 - x - 6x + 6 = x^3 - 7x + 6$$

Ainsi l'équation  $x^3 - 7x + 6 = 0$  est équivalent à l'équation  $(x+3)(x-2)(x-1)$

b) d'après la règle du produit nul, on aura  $(x+3)(x-2)(x-1) = 0$  si et seulement si  $x+3=0 \Leftrightarrow x = -3$  ou  $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$  ou  $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

les deux dernières solutions de cette équation sont les abscisses des points M et N déjà connus.

Le troisième point d'intersection C a donc pour abscisse 3 et pour ordonnée

$$g(-3) = (-3)^3 = -27. \text{ Le point C est donc } C(-3; -27)$$



10

**SE PERFECTIONNER**

1) si  $C_f$  passe par le point A(2;10) alors

$$f(2) = 10 \Leftrightarrow 4a + 2b + c = 10. \text{ Si } C_f \text{ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse } -3, \text{ alors } f(-3) = 0 \Leftrightarrow$$

$4a + 2b + c = 10$ . Si  $C_f$  coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée -6, alors  $f(0) = -6 \Leftrightarrow c = -6$ . Nous devons donc résoudre le système

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 10 \\ 9a - 3b + c = 0 \\ c = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b - 16 = 0 \\ 9a - 3b - 6 = 0 \\ c = -6 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a + 6b - 48 = 0 \\ 18a - 6b - 12 = 0 \\ c = -6 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 3L_1 \\ 2L_2 \\ L_3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 30a - 60 = 0 \\ 18a - 6b - 12 = 0 \\ c = -6 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 3L_1 + 2L_2 \\ 2L_2 \\ L_3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 18 \times 2 - 6b - 12 = 0 \\ c = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ c = -6 \end{cases}$$

On obtient ainsi  $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$

Les abscisses des points d'intersection de  $C_g$  et de

(D) sont solutions de l'équation  $2x^2 + 4x - 6 = 3x - 3 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0$ . Le calcul du discriminant donne  $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 = 5^2$

L'équation admet donc deux solutions réelles

$$\text{distinctes } x_1 = \frac{-1 - 2\sqrt{25}}{2 \times 2} = -\frac{3}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2 \times 2} = 1$$

Les points d'intersection de  $C_g$  et de (D) sont donc

$$A\left(-\frac{3}{2}; g\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{15}{2}\right) \text{ et } B(1; g(1) = 0)$$



11

**SE PERFECTIONNER**

1) f est définie si et seulement si  $ax^2 + bx + c \neq 0$ , or  $ax^2 + bx + c = 0$  pour les abscisses des points d'intersection de la parabole C et de l'axe des abscisses. On lit sur le graphique que  $ax^2 + bx + c = 0$  pour  $x = -2$  ou  $x = 3$ . Ainsi

$$D_f = \mathbb{R} / \{-2; 3\} = ]-\infty; -2] \cup ]-2; 3[ \cup ]3; +\infty[$$

2)  $f(x) = 1 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = mx + p$ . Les solutions de l'équation  $f(x) = 1$  sont donc les abscisses des points d'intersection de C et d.  $S = \{-3; 2\}$



13

**SE PERFECTIONNER**

1) Soit

$$f(x) = x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$



$Cf$  est une parabole de sommet  $S\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$

d'axe  $x = \frac{1}{2}$

$x$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$h(x)$	$\frac{7}{4}$	2	4	8

2) a/  $g(x) = x^2 + 1$

$Cg$  est une parabole de sommet  $S'(0, 1)$

d'axe  $(O, \vec{j})$

$x$	0	1	2
$y$	1	2	5

$\Delta : y = x - 1$

b) Soit  $M(x, y) \in Cg$ , or  $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ y & -1 & 1 \end{array}$

$$d = (M, \Delta) = \frac{|x - y - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

On a :  $M(x, y) \in Cg \Leftrightarrow y = x^2 + 1$ .

D'où

$$d(M, \Delta) = \frac{x - (x^2 + 1) - 1}{\sqrt{2}} = \frac{-x^2 + x - 2}{\sqrt{2}} = \frac{f(x)}{\sqrt{2}}$$

$d(M, \Delta)$  est minimal si  $f(x)$  est minimale

, d'où  $x = \frac{1}{2}$  or  $M \in Cg \Rightarrow y = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$

**Conclusion :**  $M\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$

## 14 SE PERFECTIONNER

1/ On pose  $M(x, y)$

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (x+1)^2 + y^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2 = 4$$

$$\text{sig } x^2 + y^2 = 1$$

C'est l'équation du cercle trigonométrique

**Conclusion :**  $\Gamma = C_{(0,1)}$

2<sup>ème</sup> méthode :

$$M \in \Gamma \text{ sig } MA^2 + MB^2 = 4$$

$$\text{sig } MA^2 + MB^2 = AB^2 \text{ (car } AB = 2)$$

sig  $M \in C_{[AB]}$ , d'où  $M \in$  au cercle

trigonométrique

$$2/ f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

a)  $f$  est définie si  $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1$

$$Df = [-1, 1]$$

\* On a :  $x \in Df \text{ sig } -1 \leq x \leq 1$

$$\text{sig } -1 \leq -x \leq 1$$

$$\text{sig } -x \in Df$$

$$f(-x) = \sqrt{1-(-x^2)} = \sqrt{1-x^2} = f(x).$$

D'où  $f$  est paire

$$b) \sqrt{\quad} = Cf \cup S_{(0,\vec{i})}Cf$$

$$M(x, y) \in \sqrt{\quad} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 1-x^2 \text{ et } x \in [-1, 1]$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{1-x^2} \text{ ou } y = -\sqrt{1-x^2}, x \in [-1, 1]$$

$$\Leftrightarrow y = f(x) \text{ ou } y = -f(x)$$

$$\Leftrightarrow M \in Cf \text{ ou } M \in s_{(0,\vec{i})}(Cf)$$

**Conclusion :**  $\sqrt{\quad} = Cf \cup S_{(0,\vec{i})}(Cf)$



c) On a  $C_f$  la partie de  $\sqrt{\quad}$  située au dessus de l'axe des abscisses

$$3/ \quad h(x) = \frac{1}{2x}$$

a)  $C_f \cap C_h$  ?

$$M(x, y) \in C_f \cap C_h \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{1-x^2} \\ y = \frac{1}{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2x}$$

$$C.E \begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in ]0, 1]$$

\* Si  $x \in ]0, 1]$

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2x} \Leftrightarrow 1-x^2 = \frac{1}{4x^2} \Leftrightarrow 4x^2 - 4x^4 = 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^4 - 4x^2 + 1 = 0$$

On pose  $x^2 = X$

$$\Leftrightarrow 4X^2 - 4X + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2X-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2X-1=0 \Leftrightarrow X = \frac{1}{2} \text{ d'où } x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{d'où } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (impossible car } x \in ]0, 1])$$

$$* \text{ Si } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{1}{2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\textbf{Conclusion : } C_f \cap C_h = \left\{ M_0 \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

$$b) \quad h(x) = \frac{1}{2x} \quad D_h = \mathbb{R}^*$$

$x$	0	0,5	1	1,5	2
$h(x)$		1	0,5	0,33	0,25

$C_h$  est une hyperbole de centre 0  
d'asymptote les droites  $(O, \vec{i})$ ,  $(O, \vec{j})$

$$2\sqrt{1-x^2} < \frac{1}{2x} \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} < \frac{1}{2x}$$

$$\Leftrightarrow f(x) < h(x) \quad S_{IR} = ]0, 1] \setminus \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$





## Statistiques

### I) Résumé du cours :

La statistique est une science d'observation qui, en classant des données, décrit des phénomènes au moyen d'un certain nombre de valeurs numériques.

#### A. Langage statistique :

Une étude statistique à une variable s'effectue sur une population composée d'individus sur lesquels on observe un caractère.

##### 1) Population :

Tout ensemble étudié par la statistique est une population ses éléments sont appelés des individus.

##### Exemple :

Une étude statistique porte sur les élèves d'un lycée. La population est alors constituée par l'ensemble des élèves du lycée et les individus sont les élèves.

##### 2) Caractère :

Un critère retenu pour analyser une population s'appelle un caractère.

S'il prend des valeurs numériques on dit que le caractère est quantitatif. Sinon on dit que le caractère est qualitatif.

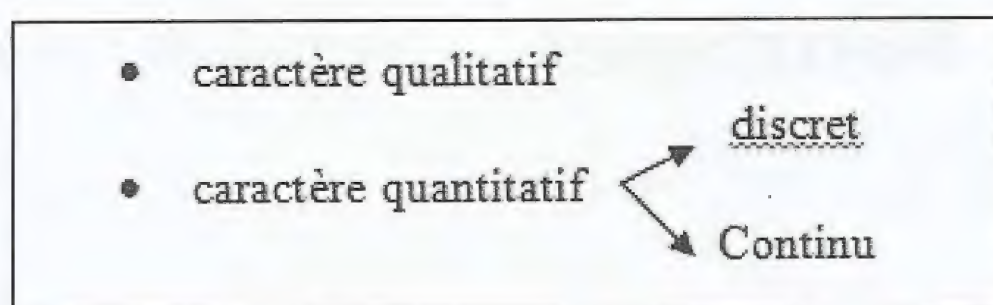
##### Exemples :

- Le caractère « couleur des yeux de l'élève » est un **caractère qualitatif non quantifiable**). Les modalités de ce caractère sont les couleurs des yeux : vert, noir, marron, bleu ...
- Le caractère « mois de naissance de l'élève » est un **caractère qualitatif ordonné** (car non quantifiable, mais ordonnable : les mois s'ordonnent). Les modalités de ce caractère sont les mois de l'année : janvier, février...
- Le caractère « nombre de frères et sœurs de l'élève » est un caractère quantitatif discret : quantitatif car le caractère se traduit à l'aide d'un nombre exprimant une quantité et discret car le caractère ne prend que des valeurs entières de caractère.
- Le caractère « taille de l'élève » est un caractère quantitatif continu : quantitatif car le caractère se traduit à l'aide d'un nombre exprimant une quantité et continu car ce nombre peut prendre toute valeur comprise entre certaines limites.





### En résumé :



### 3) Classe :

On peut répartir les valeurs d'un caractère quantitatif en classes, c'est-à-dire en intervalles :

### Exemple :

Les notes obtenues par tous les candidats aux épreuves de baccalauréat. Les valeurs extrêmes des intervalles peuvent être comprises ou exclues. Il faut que chacune des valeurs du caractère appartienne à une classe et une seule.

### 4) Effectifs, fréquences, pourcentages :

- L'effectif  $n_i$  d'une classe est le nombre d'individus qu'elle contient.

**Exemple :** dire que la valeur 15 a pour effectif 10 signifie qu'il y a 10 observations pour la valeur du caractère 15.

- La fréquence  $f$  d'une classe est le rapport de son effectif  $n_i$  à l'effectif total  $N$

de la population étudiée :  $f = \frac{n_i}{N}$

- Le pourcentage  $p$  d'une classe s'obtient en multipliant sa fréquence  $f$  par

$$100 : p = \frac{n}{N} \times 100$$

### 5) Effectifs cumulés :

Lorsque l'on étudie un caractère quantitatif :

- On appelle effectif cumulé croissant de la valeur  $x$  le nombre d'individus ayant des valeurs du caractère inférieures ou égales à  $x$ .
- On appelle effectif cumulé décroissant de la valeur  $x$  le nombre d'individus ayant des valeurs du caractère supérieur ou égale à  $x$ .

### 6) Fréquences cumulées :

Les mêmes notions et les mêmes calculs sont applicables à la série des fréquences.

La fréquence cumulée correspondant à une modalité est la somme de la fréquence correspondant à cette modalité et des fréquences correspondantes à toutes les valeurs précédentes.



## B. Représentation graphique :

### 1) Diagramme à barres :

Pour les modalités quantitatives, on peut utiliser un système d'axe.

Dans le graphique cartésien, on porte :

- En abscisse, les valeurs du caractère.
- En ordonnée, les effectifs correspondants ou les fréquences correspondantes.

La ligne polygonale obtenue en joignant les points représentatifs par des segments de droites s'appelle le polygone des effectifs (ou des fréquences).

Un diagramme à barres est une représentation de données statistiques à l'aide de rectangles de largeur constante.

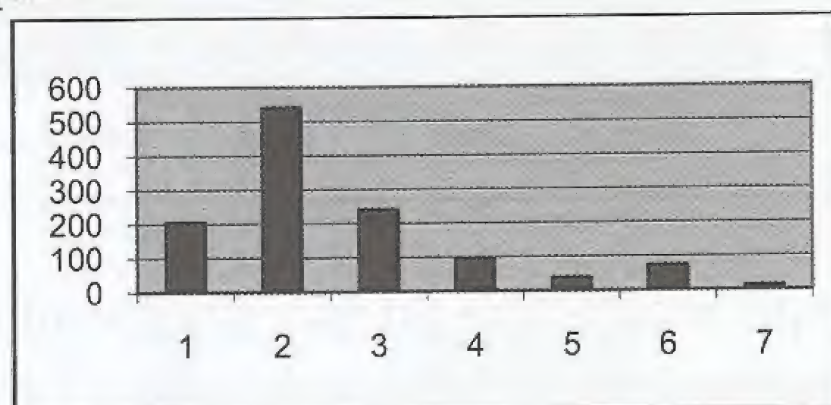
#### Exemple 1 :

##### \* Caractère quantitatif :

Une enquête est faite sur le nombre d'enfants de 1200 familles ayant au moins un enfant scolarisé dans un lycée. Les résultats sont les suivants :

<i>Nombre d'enfants par famille</i>	1	2	3	4	5	6	7
<i>Effectifs</i>	204	540	240	96	36	72	12

Représentation graphique :

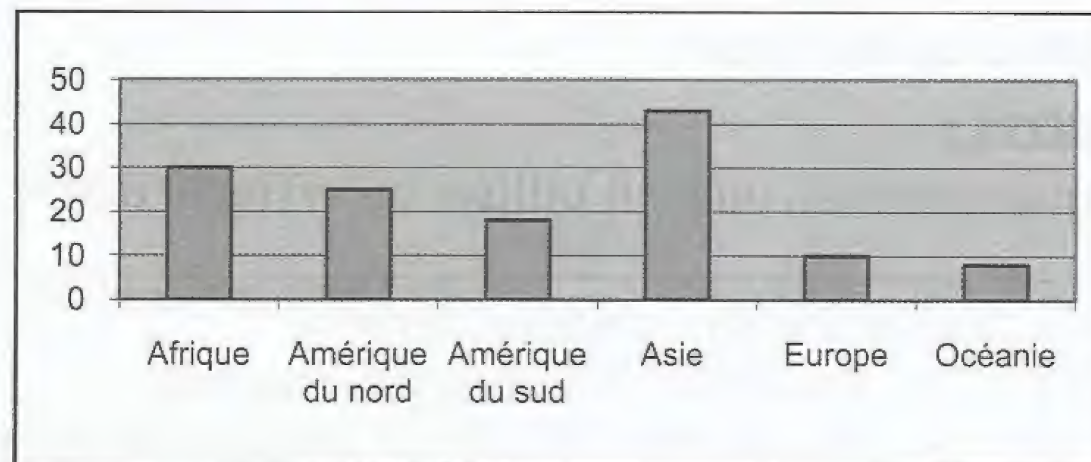


#### Exemple 2 :

##### \* Caractère qualitatif :

le schéma ci-dessous est un diagramme à barres représentant la superficie en million de kilomètres carrés des blocs continentaux.





## 2) Diagramme en bâtons :

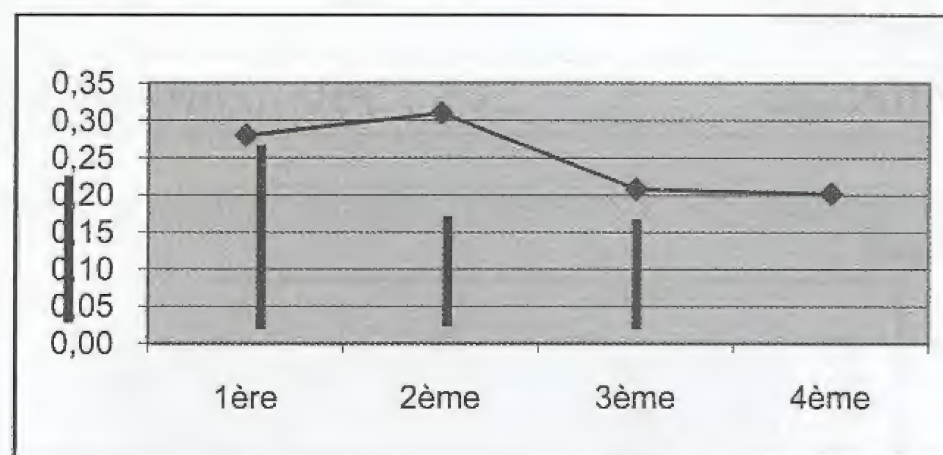
Lorsque le caractère est discret, une représentation peut être un diagramme en bâton qui représente les données statistiques à l'aide de segments.

## 3) Polygone des fréquences :

Un polygone de fréquence est obtenu en joignant par des segments de droites les extrémités des bâtons.

**Exemple :** Répartition des élèves d'un lycée en fonction de la classe qu'ils fréquentent :

Modalités	1 <sup>ère</sup>	2 <sup>ème</sup>	3 <sup>ème</sup>	4 <sup>ème</sup>	Total
Fréquences	$\frac{140}{500} = 0,28$	$\frac{155}{500} = 0,31$	$\frac{104}{500} = 0,208$	$\frac{101}{500} = 0,202$	1



## 4) Histogramme :

On utilise ce procédé lorsque le caractère est quantitatif continu :

- Chaque classe est représentée par un rectangle dont l'aire est proportionnelle à l'effectif.
- Un des côtés des rectangles appartient à un axe, et ses côtés sont proportionnels aux amplitudes des classes.
- Si les classes d'égale amplitude, la hauteur de chaque rectangle est donc proportionnelle à l'effectif.

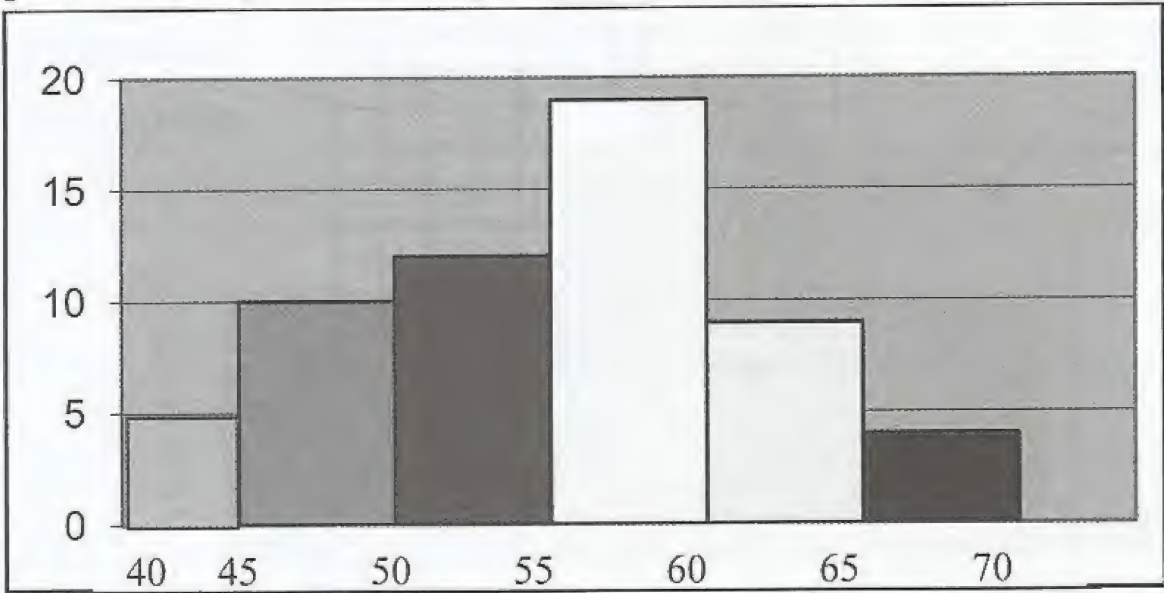
## Exemple :

Au cours d'une visite médicale, on a pesé 60 personnes. Les résultats, exprimés en kilogramme, sont donnés dans le tableau suivant :



Poids	[40;45[	[45;50[	[50;55[	[55;60[	[60;65[	[65;70[
Nombre des personnes	6	10	12	19	9	4

Cette série est représentée par l'histogramme suivant :



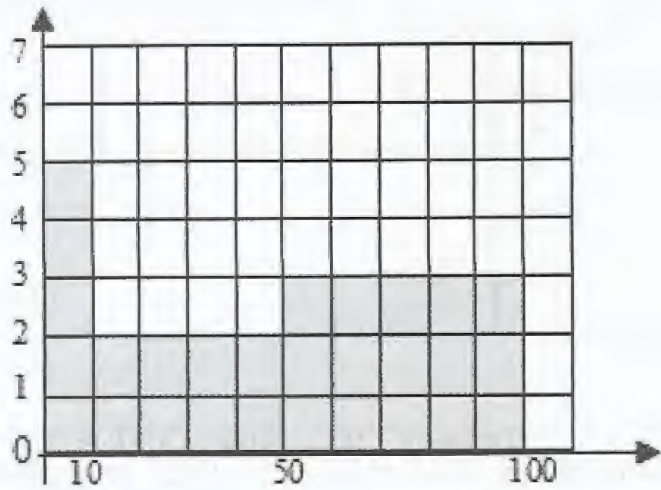
Si les classes sont d'amplitudes différentes une légère modification s'impose pour conserver la proportionnalité de l'aire sous l'histogramme à l'effectif. Lorsqu'on représente des données statistiques par un histogramme, ce qui est significatif n'est pas la hauteur des rectangles mais leurs aires.

Exemple 1 :

Répartition de l'argent de poche (en D) par mois des élèves d'une classe :

Classe	[0;10[	[10;15[	[50;100[
Effectifs	5	8	15

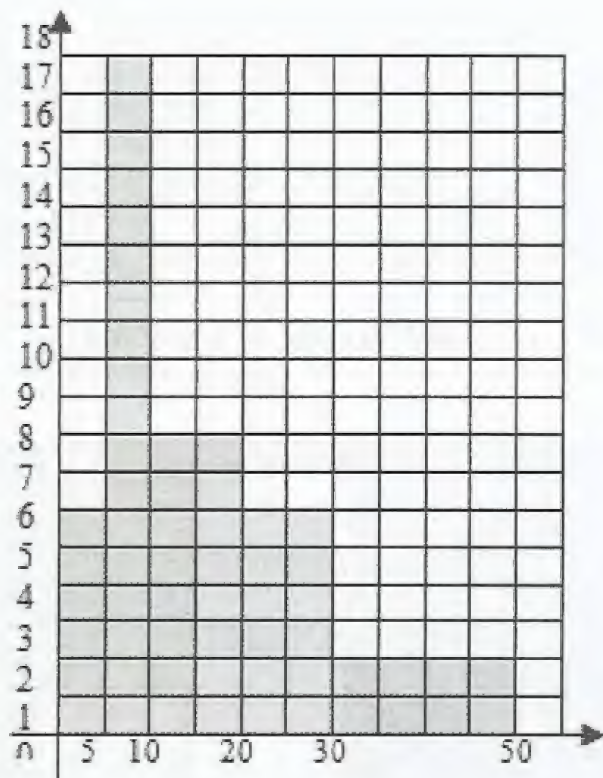
L'histogramme correspondant :



Exemple 2 : Unité de longueur L = 5

Classes	[0;5[	[5;10[	[10;20[	[20;30[	[30;50[
Effectifs	6	18	16	12	12
Hauteur des rectangles de l'histogramme	6	18	$\frac{16}{2} = 8$	$\frac{12}{2} = 6$	$\frac{12}{4} = 3$



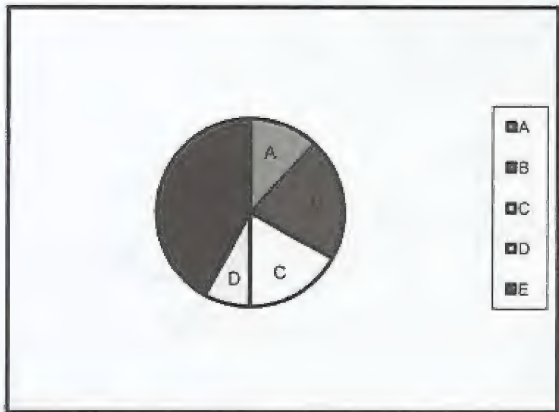


5) Diagramme circulaire :

Chaque classe est représentée par un secteur circulaire dont la surface est proportionnelle à l'effectif. Il en est donc de même l'angle au centre.

Exemple :

Modalités	A	B	C	D	E	Total
Effectifs	12	21	17	8	42	100
Pourcentage	12 %	21 %	17 %	8 %	42 %	100 %
Angles	43.2°	75.6°	61.2°	28.8°	151.2°	360°



Les angles des secteurs angulaires s'obtiennent par proportionnalité.  
L'effectif de la population étant 100, A occupe 12% du disque.  
Par conséquent, l'angle de secteur angulaire représentant A occupera 12% de 360° c'est-à-dire 43,2° etc....

6) Polygone des effectifs cumulés croissants :

Graphiquement, on obtient un ensemble de points que l'on relie par des segments de droites. On trace ainsi le polygone des effectifs cumulés croissants (ou décroissant).

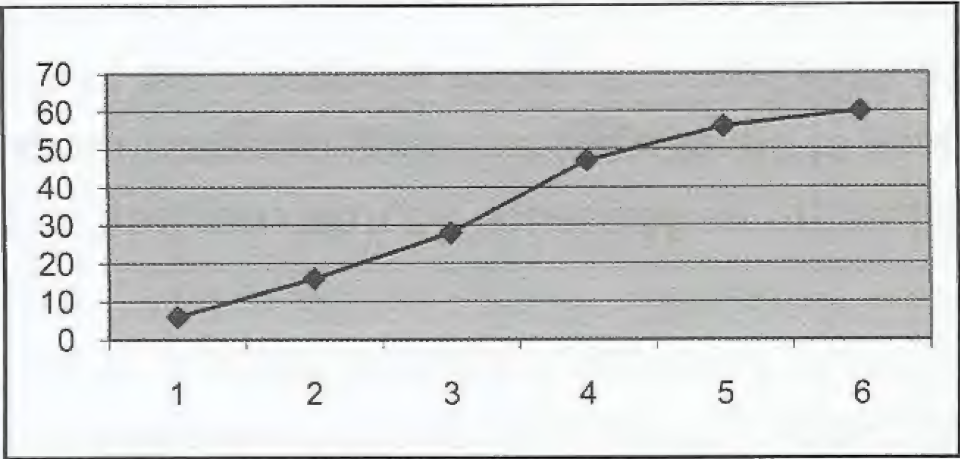




Exemple :

Classes	[40;45[	[45;50[	[50;55[	[55;60[	[60;65[	[65;70[
Effectifs	6	10	12	19	9	4
Effectifs cumulés croissants	6	16	28	47	56	60

Polygone des effectifs cumulés croissants correspondants :



C. Paramètres d'un caractère statistique :

On distingue deux types de paramètres sur un caractère statistique.

* Les paramètres de position	{ Le mode La médiane La moyenne Quartile
* Les paramètres de dispersion	{ L'étendue L'écart type Variance Intervalle, Interquartiles

Paramètre de position :

Mode : (ou valeur dominante)

\* Pour un caractère direct :

Le mode est une valeur du caractère qui correspond à l'effectif le plus grand.

Exemple 1 :

Nombre de frères et sœurs d'un groupe de 100 élèves :

Nombre de frères et soeurs	0	1	2	3	4	5	6
Nombre d'élèves	23	36	17	14	4	4	2

Dans cette série « Nombre de frères et sœurs », le mode est 1.



\* Pour un caractère qualitatif :

Exemple 2 :

Le tableau suivant donne la répartition des mariages dans une salle de fête durant 2004 :

Mois	Jan	Fév	Mars	Avr	Mai	Jui	Juil	Août	Sept	Oct	Nov	Déc
Nombre de mariages	0	3	3	10	7	20	36	19	12	4	1	2

Le mode de cette série est juillet.

\* Pour un caractère quantitatif continue (série classée), la définition précédente n'est plus valable. On définit cependant la classe modale, c'est la classe dont l'effectif est relativement le plus élevé et on attribut au mode la valeur centrale de cette classe.

\* Si le polygone des effectifs ne présente qu'une seul pointe la série est dite : uni-modale.

\* Si le polygone des effectifs présente plusieurs pointes la série a plusieurs classes modales (ou plusieurs modes). La série est dite multimodale.

Exemple :

Dans un crèche on a suivi la consommation journalière de lit en poudre chez les bébés de deux mois.

Consommation en g	[40;45[	[50;60[	[60;70[	[70;80[
Nombre de bébé	9	31	26	13

Pour cette série la classe modale est [50;60[ et le mode est  $\frac{50 + 60}{2} = 55g$ .

Moyenne :

On considère un caractère quantitatif :

Valeur du caractère ou centre de l'intervalle	$x_1$	$x_2$	.....	$x_p$
Effectifs	$n_1$	$n_2$	.....	$n_p$

La moyenne arithmétique est alors le réel  $\bar{x}$  définie par :

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_p \times x_p}{N}$$
 où  $N = n_1 + n_2 + .... + n_p$  (N est donc l'effectif total).

Exemple 1 :

On a soumis un échantillon de 115 personnes à un test de 20 questions où il fallait répondre par vrai ou faux.

On a obtenu le tableau suivant :

Nombre de réponses correctes	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Effectifs	2	0	3	5	7	11	14	18	16	15	10	7	3	1	2	1



$$\bar{x} = \frac{(2 \times 4 + 5 \times 0 + 6 \times 3 + \dots + 1 \times 19)}{115} = \frac{1306}{115} = 11,36 \text{ (à } 10^{-2} \text{ près)}.$$

Il y a en moyenne 11 ,36 (à 10<sup>-2</sup> près) réponses correctes.

Exemple 2 :

Dans une entreprise, la répartition des salaires est la suivante :

Salaire en dinars	[300;500[	[500;700[	[700;1000[	[1000;1500[
Nombre de salariés	50	25	12	3

Pour calculer le salaire moyen, on dresse d’abord un tableau donnant les centres de classes.

Classe salaire	Centre $x_i$	Effectif $n_i$	$x_i \times n_i$
[300;500[	400	50	20 000
[300;500[	600	25	15 000
[700;1000[	850	12	10 200
[1000;1500[	1250	3	3750
Total		90	48 950

Exemple 3 :

En utilisant les fréquences (Tableau de l’exemple 2)

Salaire en dinars	[300;500[	[500;700[	[700;1000[	[1000;1500[
Nombre de salariés	50	25	12	3

Classe salaire	Centre $x_i$	Effectif $n_i$	Fréquence $f_i$
[300;500[	400	50	$\frac{50}{90} = 0,55$
[300;500[	600	25	$\frac{25}{90} = 0,27$
[700;1000[	850	12	$\frac{12}{90} = 0,13$
[1000;1500[	1250	3	$\frac{3}{90} = 0,033$
Total		90	

$$\bar{x} = x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3 + x_4f_4 \approx 543,89$$





Remarque : Moyenne et mode

\* La moyenne d'un caractère quantitatif n'est pas nécessairement une valeur de ce caractère, alors que le mode est une valeur : c'est la valeur qui a un effectif maximum.

Médiane :

On considère un caractère quantitatif :

⇒ Série statistique à caractère continu :

dans le cas des séries d'un caractère continu, l'intervalle de variation du caractère x est partagé en classes, la médiane est la valeur du caractère correspondant à un effectif cumulé égale à la moitié de l'effectif total.

La médiane partage la série classée en deux parties de même effectif.

Méthode graphique pour déterminer la médiane :

\* Dans le cas où le caractère est continu par son polygone des effectifs cumulé croissants ou décroissants, on trace la droite horizontale correspondant à la moitié de l'effectif total.

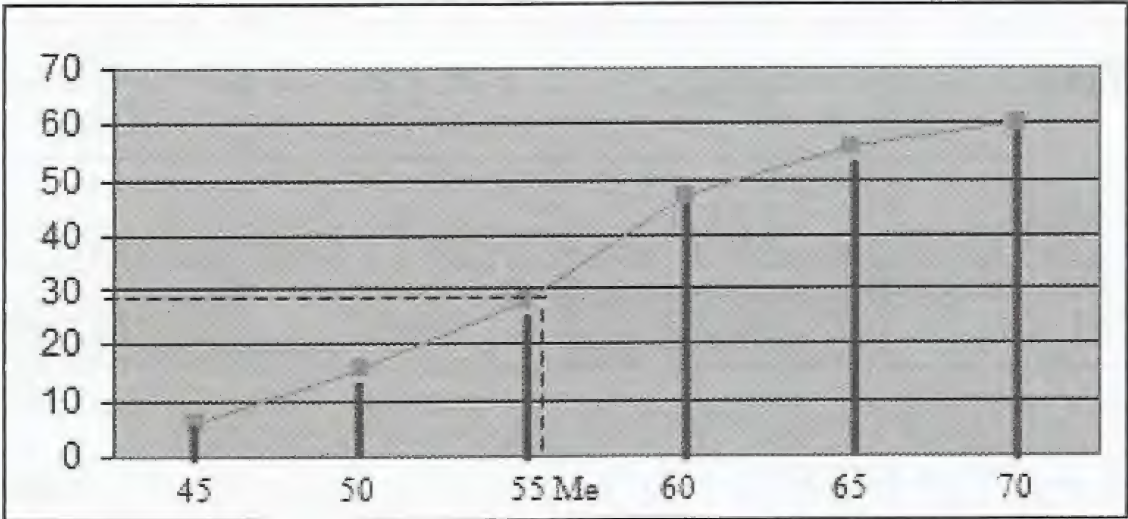
La médiane est l'abscisse du point du polygone dont l'ordonné est égale à  $\frac{N}{2}$  (où N est l'effectif total de la série).

Exemple :

Au cours d'une visite médicale, on a pesé 60 personnes. Les résultats exprimés en kilogrammes sont donnés dans le tableau suivant :

Classes	[40;45[	[45;50[	[50;55[	[55;60[	[60;65[	[65;70[
Effectifs	6	10	12	19	9	4
Effectifs cumulés croissants	6	16	28	47	56	60

Le polygone des effectifs cumulés croissant correspondant :







La moitié de l’effectif total est 30 d’après le graphique, la médiane vaut environ 56.

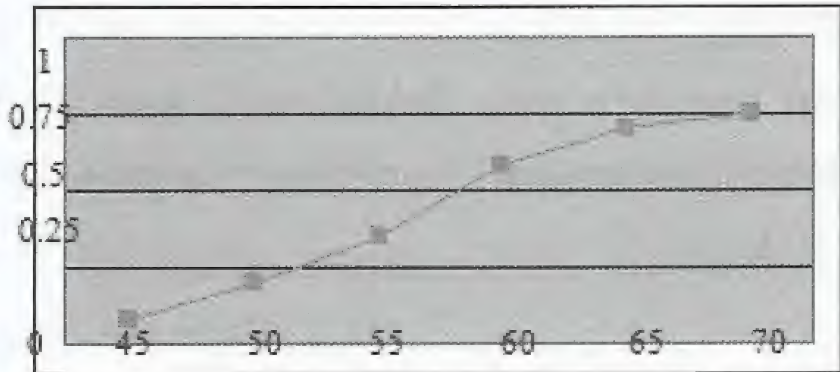
\* Dans le cas où le caractère est connu par son polygone des fréquences cumulées croissantes ou décroissantes, on trace la droite horizontale correspondant à la fréquence cumulé 0,5. La médiane est l’abscisse du point dont l’ordonnée est égale à 0,5.

Exemple :

Au cours d’une visite médicale, on a pesé 60 personnes. Les résultats exprimés en kilogrammes sont donnés dans le tableau suivant :

Classes	[40;45[	[45;50[	[50;55[	[55;60[	[60;65[	[65;70[
Effectifs	6	10	12	19	9	4
Fréquences	0.1	0.166	0.2	0.317	0.15	0.067
Effectifs cumulés croissants	6	16	28	47	56	60

Le polygone des effectifs cumulés croissant correspondant :

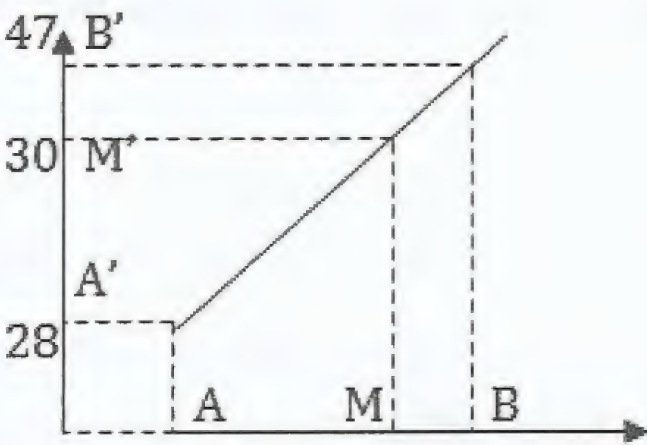


\* Méthode de calcule :

La classe médiane est la classe [55;60[. L’effectif cumulé croissant sur les 4 premières classes vaut 47. (47 > 30 : 30 correspond à 50% de l’effectif total).

Calculons la médiane par interpolation linéaire en s’aidant du schéma suivant :

Effectif cumulé croissants



$$\frac{AM}{AB} = \frac{A'M'}{A'B'} \text{ donc } \frac{Me - 55}{60 - 55} = \frac{30 - 28}{47 - 28}$$
$$\text{d'où } \frac{Me - 55}{30 - 28} = \frac{60 - 55}{47 - 28}$$

55	28
Me	30
60	47

D’une manière pratique, on utilise le tableau ci-contre :





$$\frac{Me - 55}{30 - 28} = \frac{60 - 55}{47 - 28}$$

$$\frac{Me - 55}{2} = \frac{10}{19} \text{ donc } Me - 55 = \frac{20}{19} \text{ d'où } Me = 55 + \frac{20}{19} = 56,05.$$

⇒ Série statistique à caractère direct :

\* Si nous ordonnons les valeurs du caractère d'une série statistique par ordre de grandeurs croissantes (ou décroissantes), la médiane est la valeur qui se situe au centre de la série ainsi ordonnée.

\* Si le nombre de valeur de la série est impair soit  $20n + 1$  valeur, la médiane sera la  $(n + 1)$  valeur.

Par exemple, le tableau suivant : (  $N = 15$  ).

Valeurs	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectifs	2	3	2	1	2	1	2	2

Se traduit par la suite :  $\underbrace{3,3,4,4,4,5,5,6}_{7 \text{ termes}}, \underbrace{7,7,8,9,9,10,10}_{7 \text{ termes}} \Rightarrow$  la médiane est 6.

\* Dans le cas où la série comporte un nombre pair de valeurs, soit  $2n$  valeurs, la médiane est la moyenne des deux valeurs centrales : la  $n^{\text{ième}}$  et la  $(n + 1)^{\text{ième}}$  valeur.  
Par exemple, le tableau suivant : (  $N = 12$  ).

Valeurs	3	4	5	6	7	8	9
Effectifs	2	3	1	1	2	1	2

Se traduit par la suite :  $3,3,4,4,4,\underline{5,6},7,7,8,9,9$

$$Me = \frac{5 + 6}{2} = \frac{11}{2} = 5.5$$

la médiane est la moyenne des termes des rangs 6 et 7 autrement dit le 6<sup>ème</sup> et 7<sup>ème</sup> terme.

Attention : soit la série suivante : 10,5,2,5,7,3,4,1,2. pour déterminer sa médiane, il faut d'abord l'ordonner : 1,2,2,3,4,5,5,7,10.

Le nombre de valeurs est impair (  $N = 9$  ).

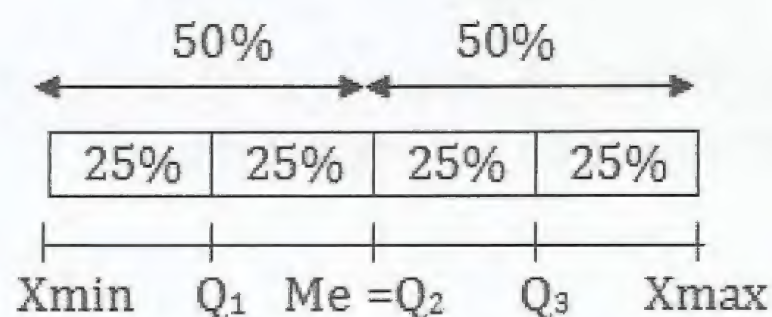
Donc la médiane est la 5<sup>ème</sup> valeur : 1,2,2,3,4,5,5,7,10

\* **Quartiles :**

La médiane partage la série en deux groupes de même effectif. Les quartiles partagent la série en quatre groupes de même effectif.



Ils sont donc au nombre de trois  $Q_1, Q_2, Q_3$  où  $Q_2$  est la médiane. Les intervalle qu'ils définissent contiennent chacun 25% des observations, soit un quart de l'effectif total,  $\frac{n}{4}$ , comme le nombre le schéma :



$Q_1$  laisse 25% des observations « avant » et 75% « après ».

$Q_3$  laisse 75% des observations « avant » et 25% « après ».

- Le 1<sup>er</sup> quartile est le nombre noté  $Q_1$  et qui est égal à la plus petite valeur du caractères tel qu'au moins 25% de l'effectif de la série prennent des valeurs inférieures ou égales à  $Q_1$ .
- La 3<sup>ème</sup> quartile et le nombre noté  $Q_3$  et qui est égale à la plus petite valeur de caractère tel qu'au moins 75% de l'effectif de la série prennent des valeurs inférieures ou égale à  $Q_3$ .
- L'intervalle  $[Q_1 Q_3]$  s'appelle intervalle interquartile.

Le réel  $Q_3 - Q_1$  s'appelle l'écart interquartile.

⇒ **Série statistique à caractère discret :**

**Exemple 1 :**

Pour la série ordonnée suivante : (N = 9)

**Valeurs :** 4, 5, 6, 7, 11, 13, 14, 15, 16

$\downarrow$        $\downarrow$        $\downarrow$   
 $Q_1$     Me     $Q_3$

La série comporte 9 observation (N est impair) donc la médiane correspond à la 5<sup>ème</sup> valeur de la série ordonnée. La médiane est 11.

La série comportant 9 termes,  $\frac{9}{4} = 2.25$  ; on dépasse 2 termes de la série donc on

prend  $Q_1$  le 3<sup>ème</sup> terme de la série c'est-à-dire  $Q_1 = 6$ .

$Q_3$  est symétrique de  $Q_1$  par rapport à la médiane d'où :



**Exemple 2 :**

Pour la série ordonnée suivante : (N = 12).

Valeurs :

4, 5, 5	6, 7, 11, 13, 13, 14	15, 16, 18
$Q_1 = 5,5 \quad Me = 12 \quad Q_2 = 14,5$		

la série comporte 12 observation (N est pair) donc la médiane correspond à la moyenne de la 6<sup>ème</sup> et la 7<sup>ème</sup> valeur de la série ordonnée.

La médiane est 12.

La série comportant 12 termes.

$\frac{12}{4} = 3$  ;  $Q_1$  est la valeur telle au moins 25% de l'effectif total prenne des valeurs inférieures ou égales à  $Q_1$ . On prend  $Q_1 = 5,5$ .

$12 \times \frac{3}{4} = 9$ . On ne peut pas prendre la 9<sup>ème</sup> observation.

On prend  $Q_3 = 14,5$ .

⇒ **Série statistique à caractère continu :**

**1<sup>er</sup> façon :**

au moyen d'une interpolation linéaire en utilisant le tableau des effectifs cumulés.

**2<sup>ème</sup> façon :**

dans le cas d'une série classé, le procédé de détermination des quartiles est identique à celui de détermination de la médiane, la méthode graphique est la plus employée.

- Le quartile inférieur  $Q_1$  est l'abscisse du point d'ordonné  $\frac{1}{4}$  sur le polygone des fréquences cumulées et  $\frac{N}{4}$  sur le polygone des effectifs cumulés.
- Le quartile supérieur  $Q_3$  est l'abscisse du point d'ordonné  $\frac{3}{4}$  sur le polygone des fréquences cumulées et  $\frac{3N}{4}$  sur le polygone des effectifs cumulés.

**Exemple :** On donne la série suivante des salariés d'une entreprise selon leurs classes des salaires mensuels nets exprimés en centaines de dinars :

Classes	[2;4[	[4;6[	[6;8[	[8;10[	[10;12[	[12;14[	Total
Effectifs	5	8	10	7	6	4	40

On veut déterminer les quartiles de cette série.



1<sup>er</sup> façon :

Classes	[2;4[	[4;6[	[6;8[	[8;10[	[10;12[	[12;14[	Total
Effectifs	5	8	10	7	6	4	40
Effectifs cumulés croissants	5	13	23	30	36	40	

Calcul du 1<sup>er</sup> quartile : le quart de l'effectif total est :  $\frac{40}{4} = 10$ .

$$\frac{Q_1 - 4}{10 - 5} = \frac{6 - 4}{13 - 5} \text{ donc } Q_1 - 4 = \frac{2}{8} \times 5$$

4	5
$Q_1$	10
6	13

d'où  $Q_1 = \frac{5}{4} + 4 = \frac{21}{4} = 5,25$  en centaines de dinars.

$Q_1 = 525$  dinars.

Calcul du 2<sup>ème</sup> quartile : Médiane : la moitié de l'effectif total est  $\frac{40}{2} = 20$ .

$$\frac{Me - 6}{8 - 6} = \frac{20 - 13}{23 - 13} \text{ donc } Me - 6 = \frac{7}{10} \times 2$$

6	13
$Me = Q_2$	20
8	23

d'où  $Me = \frac{7}{5} + 6 = \frac{37}{5} = 7,4$

$Me = 7,4$  (en centaines de dinars) donc  $Me = 740$  dinars.

Calcul du 3<sup>ème</sup> quartile :  $\frac{3}{4}N = 30$

Sur le tableau on lit : 30 personnes ont un salaire inférieur à 1000 dinars.

Donc  $Q_3 = 1000$  dinars.

2<sup>ème</sup> façon :

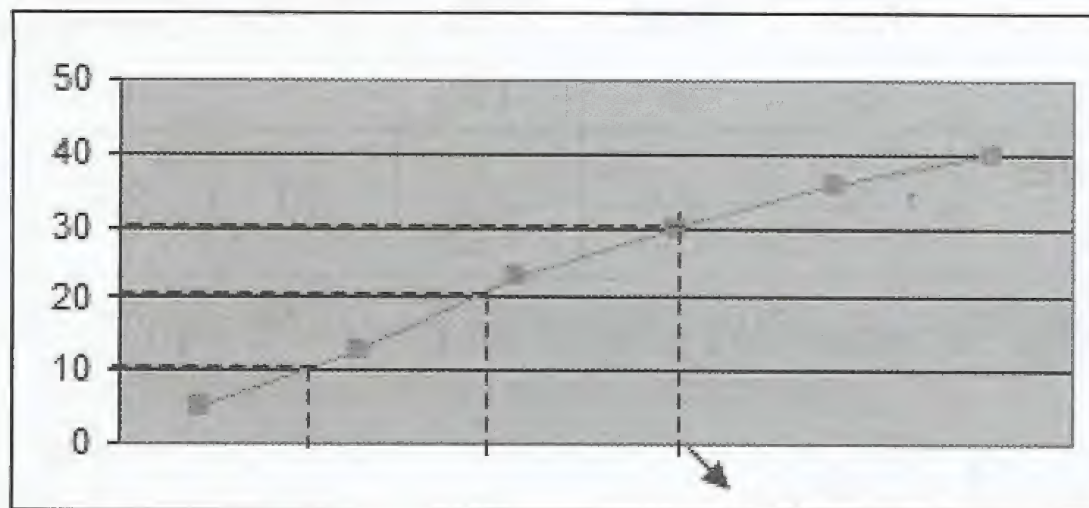
On construit le polygone des effectifs cumulés, ou bien on construit le polygone des fréquences cumulées croissantes.

Classes	[2;4[	[4;6[	[6;8[	[8;10[	[10;12[	[12;14[	Total
Effectifs	5	8	10	7	6	4	40
Effectifs cumulés croissants	5	13	23	30	36	40	





Polygone des effectifs cumulé croissants :



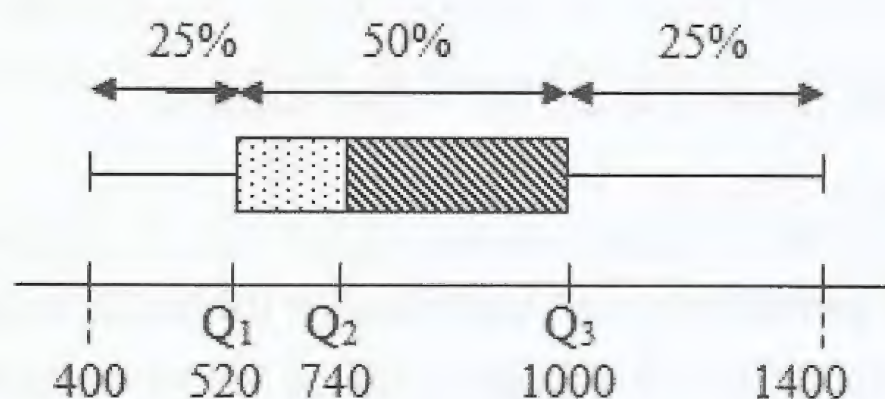
$$Q_1 = 520 \text{ dinars} ; Q_2 = 740 \text{ dinars} ; Q_3 = 1000 \text{ dinars}$$

L'intervalle interquartile est  $[520;1000]$ .

L'écart interquartile est égale à  $1000 - 520 = 480$  dinars.

### Diagramme en boîte :

Sur une échelle allant du minimum au maximum de la série, on place la médiane  $Me$  et les deux autres quartiles  $Q_1$  et  $Q_3$ . On trace un rectangle de longueur  $Q_3 - Q_1$  ; c'est-à-dire l'écart interquartile coupé par un trait à la hauteur de la médiane. On prolonge de chaque coté de la « boîte » par des traits allant jusqu'au minimum d'un côté et au maximum de l'autre.



Les trois quarts de l'effectif sont 30, ce sont tous les salariés dont le salaire est inférieur à 1000 D.

50 % des salariés ont un salaire entre 520DT et 1000DT.

### 1) Paramètres de dispersion :

#### Etendue :

L'étendue d'une série statistique est la différence entre ses deux valeurs extrêmes (le plus grande et la plus petite valeur du caractère).





Exemple 1:

Classes	[10;50[	[50;100[	[100;200[	[200;300[	[300;500[
Effectifs	18	104	47	23	6

L'étendue est  $500 - 10 = 490$ .

Exemple 2 :

Modalités	1	2	3	4	5	6	7
Effectifs	90	60	30	60	30	0	30

L'étendue est  $7 - 1 = 6$

Remarque :

Moyenne et étendue

La moyenne ne résume pas toujours toute l'information qu'on veut extraire d'une série statistique.

Les deux séries ci-dessous, de même moyenne, semblent inégalement dispersées.

-2,4 -0,4 1,6 -3,4 -2,4 1,6 3,6 -1,4 0,6 2,6  
6 -3 -4 8 6 -12 7 5 4 -17

La première série a pour étendus  $3,6 - (-3,4) = 7$

La seconde série a pour étendue  $8 - (-17) = 25$

La second série est plus dispersée que la première.

Variance :

La variance est la différence entre la moyenne des carrés et le carré de la moyenne :

$$V = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p(x_p - \bar{x})^2}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}$$

pour le calcule pratique : 
$$V = \frac{n_1 \times x_1^2 + n_2 x_2^2 + \dots + n_p x_p^2}{n_1 + n_2 + \dots + n_p} - \bar{x}^2$$

Ecart type :

L'écart type est la racine carrée de la variance, on le note  $\sigma$  ;  $\sigma = \sqrt{V}$ .

L'écart type d'une série statistique est une mesure de la plus ou moins grande dispersion des valeurs de la série par rapport à la moyenne de la série. Un écart type important signifie que les valeurs de la série s'éloignent souvent et de façon importante de la moyenne.

Exemple :

On donne la série suivante :





Modalités	15	18	19	20	21	22
Effectifs	1	1	2	2	4	6

$x_i$	$n_i$	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
15	1	15	225
18	1	18	324
19	2	38	722
21	2	40	800
21	4	84	1764
22	6	132	2904
Total	16	327	6739

$\overline{X} = 20,44 \quad ; \quad V = 3,5 \quad ; \quad \sigma = 1,87$

Remarque :

On peut obtenir  $N, \overline{X}, V$  et  $\sigma$  directement à partir de la calculatrice.

D. Séries chronologiques :

- Le coefficient multiplicateur qui permet de passer de l'année b à l'année n est égal au quotient de la valeur de l'année n par la valeur de l'année b.

$$C = \frac{\text{valeur de l'année n}}{\text{valeur de l'année b}}$$

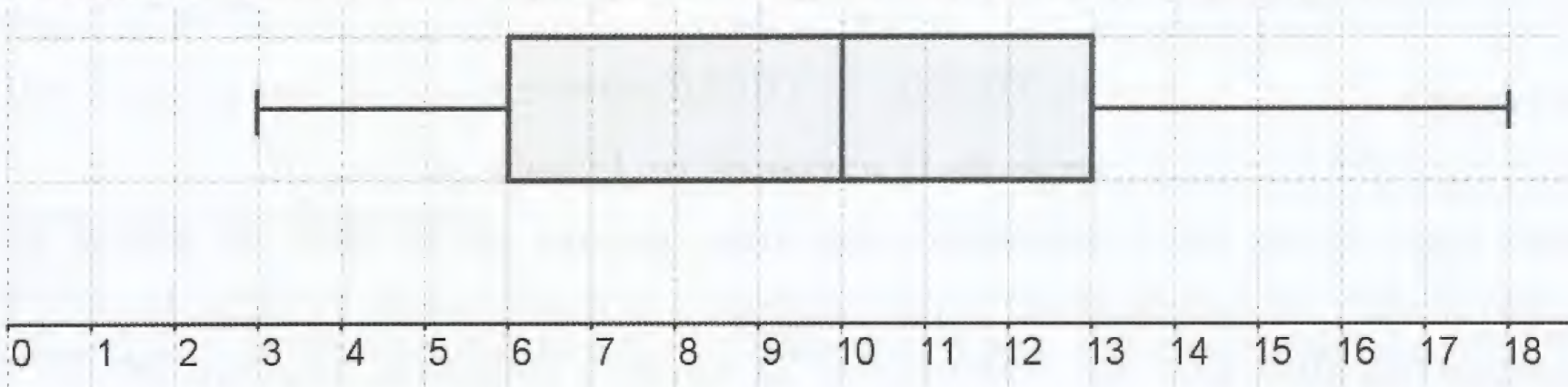
- L'indice I de l'année n, base 100 en l'année b est égale à :  $I = C \times 100$

II) Exercices :



Q-C-M

On a résumé une série statistique par le diagramme en boîte ci-dessous :



- 1) L'étendue est de :  
a) 18                      b) 10                      c) 15                      d) 20
- 2) La moyenne est de :  
a) 10                      b) 9,5                      c) On ne peut pas savoir                      d) 10,5



3) La médiane est de :

- a) 10                      b) 9,5                      c) On ne peut pas savoir                      d) 10,5

4) L'écart inter-quartile est de :

- a) 15                      b) 3                      c) 7                      b) 5

## 2 VRAI-FAUX

- 1) Dans un diagramme en boîte, la médiane se situe toujours au milieu de la boîte.
- 2) L'écart type est toujours un nombre positif.
- 3) Un écart type nul signifie que toutes les valeurs de la série sont égales.
- 4) Pour une série ordonnée de 341 valeurs, le premier quartile est la 86<sup>ème</sup> valeur.
- 5) Dans un diagramme en boîte, la boîte « contient » 75% des valeurs de la série.

## 3 APPLIQUER

Dans une classe de 30 élèves,

- la moyenne des 20 filles est 11,5,
- la moyenne des 10 garçons est 8,5.

Donner la moyenne de classe.

## 4 APPLIQUER

Après correction des copies, la moyenne à l'épreuve de Mathématiques au Baccalauréat est 8,4. Si le ministère de l'Education Nationale décide d'augmenter la note de chaque copie de :

- 1) 1,6 point, quelle sera la nouvelle moyenne nationale ?
- 2) 10%, quelle sera la nouvelle moyenne nationale ?

## 5 APPLIQUER

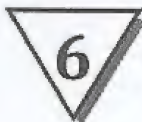
Un relevé des durées de communications téléphoniques effectuées dans un central téléphonique a fourni les informations consignées dans le tableau suivant (l'unité de durée est la minute)

Intervalle de durée	[0;2[	[2;4[	[4;6[	[6;8[	[8;10[	[10;12[
Effectif	14	16	25	15	17	13





- 1) Calculer la durée moyenne d'un appel.
- 2) On regroupe les classes par deux, ce qui revient à considérer les classes : [0 ; 4[, [4 ; 8[ et [8 ; 12[. Calculer la durée moyenne d'un appel pour cette nouvelle série.
- 3) Quelle conclusion pouvez-vous formuler ?



APPLIQUER

Un établissement de transfusion sanguine a dressé le bilan de sa collecte de sang pendant un an.

Age du donneur	Proportion en %
Mois de 20 ans	4%
Entre 20 et 29 ans	14%
Entre 30 et 39 ans	24%
Entre 40 et 49 ans	32%
Plus de 50 ans	26%

Représenter cette série statistique par un diagramme circulaire.

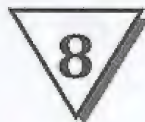


APPLIQUER

Le tableau ci-dessous donne la répartition des salaires mensuels, en DT, des employés d'une entreprise :

Salaire	[800;900[	[900;1000[	[1000;1050[	[1050;1150[	[1150;1300[
Effectif	42	49	74	19	16

- 1) Calculer le salaire moyen dans cette entreprise. Que penser d'un tel résultat ?
- 2) Dans cette entreprise, combien d'employés gagnent au plus 1050 DT ?
- 3) Dresser le polygone des effectifs cumulés croissants et lire une valeur approchée de la médiane et de Q1 et Q3.
- 4) Construire le diagramme en boîte de la série statistique.



S'ENTRAINER

Un entomologiste a fait des relevés sur la taille de 50 courtilières adultes :  
33, 35, 36, 36, 37, 37, 37, 38, 38, 38, 39, 39, 39, 39, 40, 40, 40, 40, 40, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 43, 43, 43, 43, 44, 44, 44, 44, 45, 45, 45, 46, 46, 47, 47, 48, 48, 50.





1) Organiser les relevés dans un tableau d'effectifs semblable au suivant :

Valeur	33	34	35	36						50
Effectif										
E.C.C										

2) Représenter les données par un diagramme à bâtons.

3) Calculer la moyenne de la série.

4) Déterminer sa médiane.

Déterminer les 1<sup>er</sup> et 3<sup>ième</sup> quartiles puis les 1<sup>er</sup> et 9<sup>ième</sup> déciles.

Construire le diagramme en boîte correspondant.

5) On regroupe les données en classes. Compléter le tableau des effectifs suivants :

Classes	[33 ; 37[	[37 ; 40[	[40 ; 42[	[42 ; 44[	[44 ; 47[	[47 ; 51[
Effectifs						

Dessiner l'histogramme correspondant.



S'ENTRAINER

Le tableau ci-dessous donne la répartition des notes obtenues a un contrôle de maths par 25 élèves d'une classe de 2<sup>ème</sup> années secondaires :

Notes	[1;3[	[3;5[	[5;7[	[7;9[	[9;11[	[11;13[	[13;15[	[15;17[	[17;19[
Effectifs	1	2	1	5	4	1	7	3	1
Fréquence									
F.C.C									

1) Calculer la note moyenne exacte (une ligne vide dans le tableau vous est proposée, vous pouvez vous en servir si vous le souhaitez ...).

2) Compléter le tableau.

3) a) Représenter graphiquement les fréquences cumulées croissantes.

b) Déterminer graphiquement la médiane, les premier et troisième quartiles (votre démarche doit être visible, c'est-à-dire avec des traces sur le graphique).

c) Donner l'intervalle inter-quartile.

d) Calculer l'écart inter-quartile et l'étendue de cette série de notes (je veux voir le calcul).

e) Construire le diagramme en boite de cette série de notes.





10

SEPERFECTIONNER

Le tableau suivant donne les effectifs des notes obtenues dans une classe en Mathématiques et en Sciences physiques :

Note	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Maths	0	1	0	2	0	1	3	0	5	0	2	1	1	0	0	0	2	1	1	0	2
physiques	0	1	0	0	0	0	0	4	4	1	0	3	1	4	2	0	1	0	0	0	1

- 1) a) Déterminer les rangs des quartiles et de la médiane des deux séries puis donner leurs valeurs.
- b) Faire le diagramme en boîte des deux séries sur une même échelle puis commenter le diagramme.
- 2) a) Déterminer la moyenne des notes de Mathématiques et la comparer à la médiane en expliquant ce qui cause cet écart.
- b) Déterminer la moyenne des notes de Sciences de la vie et de la terre. L'écart avec la moyenne est-il le même ? Pourquoi ?
- c) Déterminer les écarts types des deux séries (arrondis au dixième) et commenter vos résultats.

11

SEPERFECTIONNER

Huit sprinters effectuent deux 100 m.  
Leurs temps sont donnés dans le tableau suivant :

Sprinter	A	B	C	D	E	F	G	H
Sprint 1	10"14	10"17	9"94	10"05	10"25	10"09	9"98	10"32
Sprint 2	10"41	9"97	9"96	10"12	10"19	10"24	10"12	10"17

- Soit  $(x_i)$  les temps respectifs des sprinters  $A, B, \dots, H$  au sprint 1  
et  $(y_i)$  les temps respectifs des sprinters  $A, B, \dots, H$  au sprint 2.
- 1) Calculer les moyennes  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  des séries  $(x_i)$  et  $(y_i)$ .
- 2) Calculer les écarts-types  $s_x$  et  $s_y$  des séries  $(x_i)$  et  $(y_i)$ .
- 3) Lequel des deux sprints a été le plus homogène ?

12

SEPERFECTIONNER

Le tableau suivant donne le montant des salaires annuels exprimés en milliers DT d'une petite entreprise.

Salaires	16	18	20	25	30	40
Nombre de salariés	6	9	10	8	5	2



- 1) Déterminer la médiane, le premier et le troisième quartiles. Interpréter ces résultats et les traduire à l'aide d'un diagramme en boîte.
- 2) Calculer le montant en DT du salaire moyen annuel de cette entreprise.
- 3) A l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à DT près de l'écart-type  $s$ .
- 4) Soit  $S$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  

$$S(x) = 6(16 - x)^2 + 9(18 - x)^2 + 10(20 - x)^2 + 8(25 - x)^2 + 5(30 - x)^2 + 2(40 - x)^2.$$
  - a) Vérifier que  $S(x) = 40x^2 - 1776x + 21152$ .
  - b) Déterminer le sens de variations de la fonction  $S$  et en déduire sa valeur minimale.
  - c) Retrouver le calcul de la variance à partir de la somme  $S$ . En déduire la valeur exacte de l'écart-type  $s$ .

13

### SEPERFECTIONNER

Le tableau suivant récapitule les moyennes trimestrielles obtenues par trois classes de 30 élèves:

Classe 1	notes	2,5	4,5	5	6	6,5	7,5	8,5	9	10	10,5	12	12,5	13	13,5	14	15,5
	effectifs	1	2	2	2	4	2	1	1	1	2	1	5	2	1	1	2
Classe 2	notes	2	2,5	3	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8	8,5	10,5	11,5	12,5	13	14,5	15,5
	effectifs	1	2	1	3	1	1	5	1	1	2	2	2	2	2	2	2
Classe 3	notes	1,5	2,5	3	3,5	4,5	5,5	6	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5	12	12,5	13	14,5
	effectifs	1	2	1	4	1	1	1	3	1	2	2	1	1	4	1	4

- 1) Pour chacune des trois classes :
  - a) Déterminer la note médiane, le premier et le troisième quartiles.
  - b) Représenter la répartition des notes des trois classes à l'aide d'un diagramme en boîte.
  - c) Calculer l'étendue, la moyenne  $\bar{x}$  et l'écart type  $s$ , à  $10^{-2}$  près.
  - d) Calculer à 1% près le pourcentage d'élèves dont la note est comprise dans l'intervalle interquartile ainsi que dans l'intervalle  $[\bar{x} - s ; \bar{x} + s]$ .
- 2) On décide de rééquilibrer les moyennes des trois classes de la façon suivante :
  - On multiplie toutes les notes de la deuxième classe par 1,12
  - On ajoute 1,2 à toutes les notes de la troisième classe.

Pour chacune de ces deux classes recalculer :

  - a) La moyenne  $\bar{x}$  et l'écart type  $s$ , à  $10^{-2}$  près.
  - b) Calculer à 1% près le pourcentage d'élèves dont la note est comprise dans l'intervalle interquartile ainsi que dans l'intervalle  $[\bar{x} - s ; \bar{x} + s]$ .





SEPERFECTIONNER

1) Les 498 premières décimales du nombre  $\pi$  sont :  
3,

141	592	653	589	793	238	462	643	383				
279	502	884	197	169	399	375	105	820	974	944	592	
307	816	406	286	208	998	628	034	825	342	117	067	
982	148	086	513	282	306	647	093	844	609	550	582	
231	725	359	408	128	481	117	450	284	102	701	938	
521	105	559	644	622	948	954	930	381	964	428	810	
975	665	933	446	128	475	648	233	786	783	165	271	
201	909	145	648	566	923	460	348	610	454	326	648	
213	393	607	260	249	141	273	724	587	006	606	315	
588	174	881	520	920	962	829	254	091	715	364	367	
892	590	360	011	330	530	548	820	466	521	384	146	
951	941	511	609	433	057	270	365	759	591	953	092	
186	117	381	932	611	793	105	118	548	074	462	379	
962	749	567	351	885	752	724	891	227	938	183	011	
949												

Les différentes décimales ( = chiffres après la virgule ) sont les entiers 0,1,2,3,.....,9.  
On se propose de compter combien de fois apparaît chacun des chiffres de 0 à 9 dans l'écriture précédente ( *attention : on ne compte que les chiffres après la virgule donc le premier 3 ne doit pas être compté* ).  
Compléter le tableau suivant :

décimales	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
effectif											498
fréquence											100 %

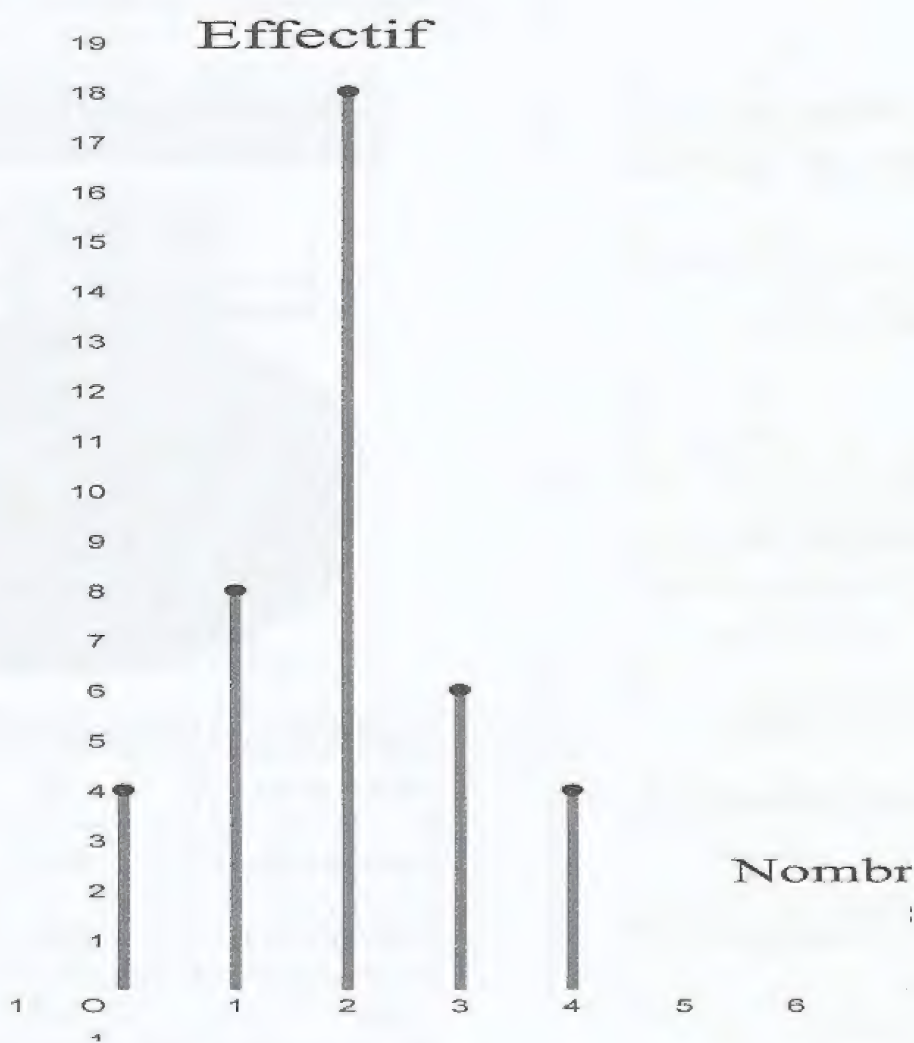
- 2) Une valeur approchée rationnelle de  $\pi$  est  $\frac{22}{7}$
- a) En posant la division, écrire  $\frac{22}{7}$  avec 6 chiffres, 12 chiffres puis 18 chiffres après la virgule. Que remarque-t-on ? Est-ce normal ?
- b) On souhaite écrire le développement décimal de  $\frac{22}{7}$  avec 498 chiffres après la virgule. Combien de fois la période 142857 va-t-elle se répéter ?
- c) Faire le même tableau qu'en 1) concernant les 498 premières décimales de  $\frac{22}{7}$ .
- 3) Comparer les deux études statistiques.





SEPERFECTIONNER

Dans un groupe de 40 élèves, on mène une enquête sur le nombre de frères et sœurs de chaque élève ainsi que sur l'argent de poche par semaine. Les résultats sont présentés ci-dessous :



Série 1 :

xi: nombre de frères et sœurs					
ni: Effectif					
E i ↗					

Série 2 :

Xi : Argent de poche en dinars	[ 0 , 5 [	[5,10[	[10,15[	[15,20[	[20,25[
Effectif ni	6	2	25	4	3
E i ↗					

- 1) Recopier et compléter les tableaux ci-dessus :
- 2) Préciser la nature du caractère étudié dans chaque série.
- 3) Pour la série 1: déterminer le mode, la médiane, la moyenne, la variance et l'écart type.
- 4) Pour la série 2 :
  - a) Déterminer le mode, la moyenne et la médiane (par calcul)
  - b) Tracer le polygone des effectifs cumulés croissantes et en déduire des valeurs approchées des quartiles  $Q_1$  ,  $Q_2$  et  $Q_3$  de la série.



**1 Q-C-M**

- 1) L'étendue est de  $18 - 3 = 15$
- 2) On ne sait pas quelle est la moyenne
- 3) La médiane est de 10
- 4) L'écart inter-quartile est de  $13 - 6 = 7$ .

**2 VRAI-FAUX**

- 1) FAUX :
- 2) VRAI : *preuve* : L'écart-type est défini par  $s = V$ , or, la racine carrée d'un nombre est toujours positive. Ainsi, on a bien :  $\sigma \geq 0$ .
- 3) VRAI : *preuve* : Si  $s=0$ , comme  $s = V$ , on aura  

$$V = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p(x_p - \bar{x})^2}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}$$

Donc :

$$n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p(x_p - \bar{x})^2 = 0$$

On a une somme de termes positifs qui est nulle, chaque terme est forcément égal à 0. On a donc :

$$x_1 = \bar{x} = x_2 = \dots = x_p.$$

Ainsi, toutes les valeurs de la série sont égales.

- 4) FAUX : *preuve* : Calculons  $\frac{85}{341} \approx 0.249 < 0.25$ ,

tandis que  $\frac{86}{341} \approx 0.252$ . Donc le premier quartile

sera la 86<sup>ème</sup> valeur.

- 5) FAUX : *preuve* : Les moustaches du diagramme correspondent chacune à un quartile, et représentent donc chacune 25% de la population étudiée. La boîte correspond donc quant à elle les 50% restant de la population.

**3 APPLIQUER**

Pour calculer la moyenne de la classe constituée par ces 2 sous-groupes (filles/garçons), il faut tenir compte des effectifs de chacun de ces sous-groupes. La moyenne de classe vaut donc :

$$\frac{n_f \bar{f} + n_g \bar{g}}{n_f + n_g} = \frac{20 \times 11,5 + 10 \times 8,5}{20 + 10} = \frac{315}{30} = 10,5.$$

**4 APPLIQUER**

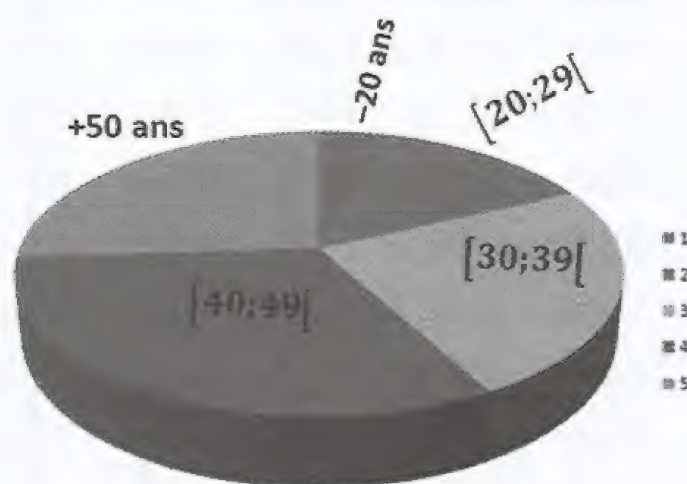
- 1°) 1,6 point, la nouvelle moyenne nationale sera augmentée de 1,6 et vaudra donc 10 ;
- 2°) 10%, la nouvelle moyenne nationale sera multipliée par 1,10 et vaudra donc 9,24.

$$\Rightarrow 3T_n = \frac{3n}{2(3n+2)} \Rightarrow T_n = \frac{n}{6n+4}$$

**6 APPLIQUER**

On dresse un tableau de proportionnalité entre chaque fréquence et l'angle du secteur angulaire correspondant On obtient ainsi :

Répartition de l'âge des donneurs



Age du donneur	% Correspondant	Angle
Moins de 20 ans	4%	$\frac{3 \times 360}{100} \times 100 = 14,4^\circ$
Entre 20 et 29 ans	14%	$\frac{14 \times 360}{100} \times 100 = 50,5^\circ$
Entre 30 et 39 ans	24%	$\frac{24 \times 360}{100} \times 100 = 86,4^\circ$
Entre 40 et 49 ans	32%	$\frac{32 \times 360}{100} \times 100 = 115,2^\circ$
Plus de 50 ans	26%	$\frac{26 \times 360}{100} \times 100 = 93,62^\circ$
TOTAL	100%	360°

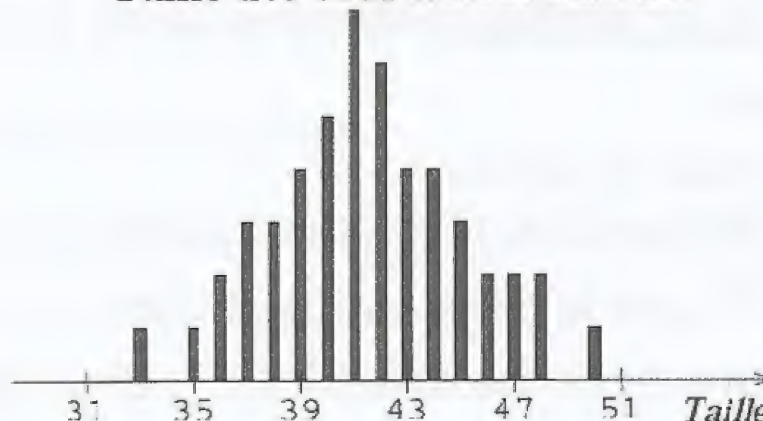
**8 S'ENTRAINER**

- 1) Tableau d'effectifs :

Valeur	33	35	36	37	38	39	40	41	42
Effectif	1	1	2	3	3	4	5	7	6
e.c.c.	1	2	4	7	10	14	19	26	32
Valeur	43	44	45	46	47	48	50	Total	
Effectif	4	4	3	2	2	2	1	50	
e.c.c.	36	40	43	45	47	49	50		

- 2) Diagramme à bâtons :

Taille des courtilières adultes





4) Médiane :

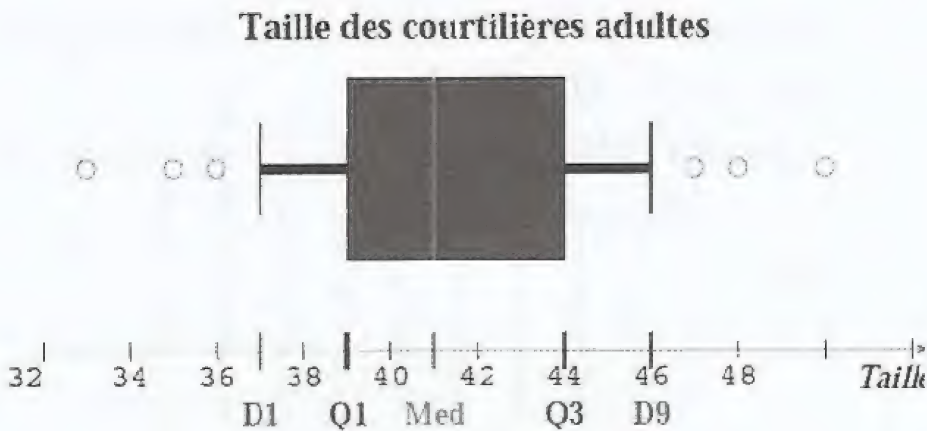
$$M_e = \frac{x_{25} + x_{26}}{2} = \frac{40 + 41}{2} = 40,5.$$

Quartiles :  $\Rightarrow 0,25 \times 50 = 12,5$  donc

$$Q_1 = x_{12} = 39 \text{ et } 0,75 \times 50 = 37,5 \text{ donc}$$

$$Q_3 = x_{45} = 46.$$

D'où le diagramme en boîte :

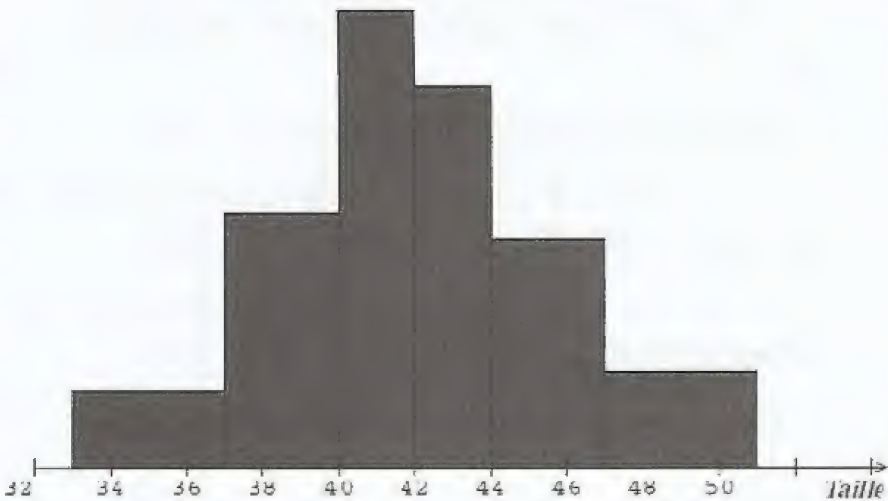


5) On regroupe les données en classes.

Classes	[33 ; 37[	[37 ; 40[	[40 ; 42[	[42 ; 44[	[44 ; 47[	[47 ; 51[
Effectifs	4	10	12	10	9	5
Densité	4	3	2	2	3	4
Fréquence	4/4 = 1	10/3 ≈ 3,3	12/2 = 6	10/2 = 5	9/3 = 3	5/4 = 1,25

Histogramme correspondant :

Taille des courtilières adultes



9

S'ENTRAINER

1°)

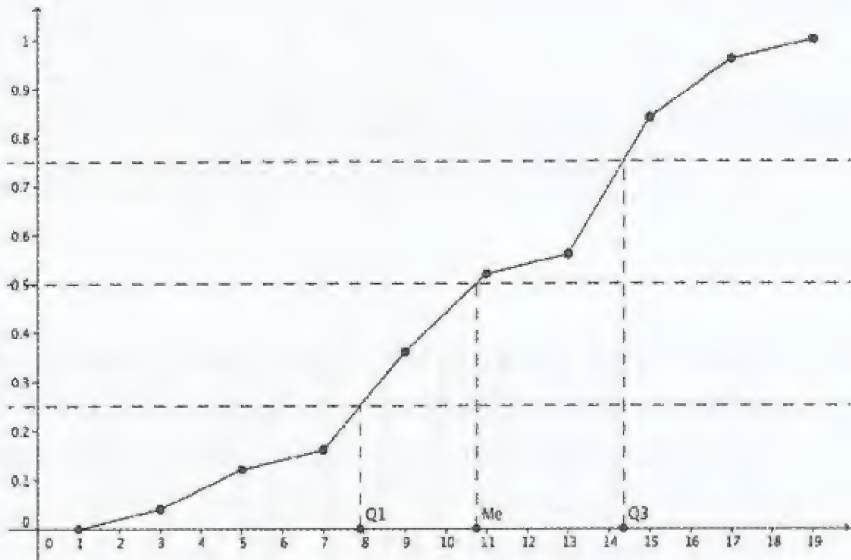
$$M = \frac{1 \times 2 + 2 \times 4 + 1 \times 6 + 5 \times 8 + 4 \times 10 + 12 + 7 \times 14 + 3 \times 16 + 1 \times 18}{25}$$

$$= \frac{272}{25} = 10,88$$

2)

Notes	{1;3[	[3;5[	[5;7[	[7;9[	[9;11[	[11;13[	[13;15[	[15;17[	[17;19[
Effectifs	1	2	1	5	4	1	7	3	1
Fréquence	0,04	0,08	0,04	0,2	0,16	0,04	0,28	0,12	0,04
F.C.C	0,04	0,12	0,16	0,36	0,52	0,56	0,84	0,96	1

3)a)



b) La note médiane de cette série de notes est l'abscisse du point qui a une fréquence cumulée croissante égale à 0,5. On lit graphiquement environ 10,8.

10

SE PERFECTIONNER

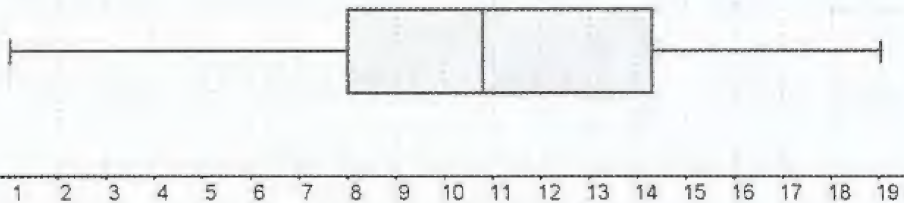
Le premier quartile est l'abscisse du point qui a une fréquence cumulée croissante égale à 0,25, on lit graphiquement environ 7,8.

Le troisième quartile est l'abscisse du point qui a une fréquence cumulée croissante égale à 0,75, on lit graphiquement environ 14,3.

c) L'intervalle inter-quartile est [7,8 ; 14,3].

d) L'écart inter-quartile est égal à  $14,3 - 7,8 = 6,5$ .  
L'étendue est égale à  $\max - \min = 19 - 1 = 18$ .

e)



12

SE PERFECTIONNER

1) L'effectif total est de 40 salariés.  
La médiane définit deux groupes de 20 salariés.  
Comme les 20<sup>ème</sup> et 21<sup>ème</sup> montants des salaires

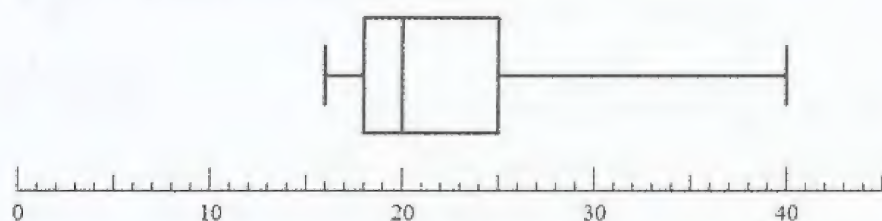


(classés par ordre croissant de valeurs) sont identiques :

la médiane est alors égale à 20 milliers DT.

Le premier quartile  $Q_1$  est défini par le 10<sup>ème</sup> salaire donc  $Q_1=18$ .

Le troisième quartile  $Q_3$  est défini par le 30<sup>ème</sup> salaire donc  $Q_3=25$ .



Dans cette entreprise, 25% des salariés ont un salaire annuel inférieur ou égal à 18 000 DT et 75 % des salariés ont un salaire inférieur ou égal à 25 000 DT. Le salaire médian est de 20 000 DT.

2°) Le montant en milliers DT du salaire moyen annuel est :

$$\bar{x} = \frac{6 \times 16 + 9 \times 18 + 10 \times 20 + 8 \times 25 + 5 \times 30 + 2 \times 40}{40} = 22,2$$

3°) Arrondi à  $10^{-3}$  près, l'écart-type obtenu à l'aide de la calculatrice est  $s = 5,997$ .

a) facile.

b)  $S$  est une fonction polynôme du second degré avec  $a=40$ ,  $b=-1776$  et  $c=21152$

$a > 0$ , alors  $S$  admet un minimum atteint pour :

$$x = \frac{-b}{2a} \text{ soit pour } x = -\frac{-1776}{80} = 22,2$$

D'autre part,  $S(22,2) = 1438,4$

Tableau de variation de la fonction  $S$  :

$x$	$-\infty$	$22,2$	$+\infty$
Variations de $S$		1438,4	

Le minimum de  $S$  est 1438,4 atteint pour  $x = 22,2$ .

c) La variance d'une série statistique est

$$V(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x})^2 \text{ où } N \text{ est l'effectif total.}$$

La variance de la série statistique est donc :

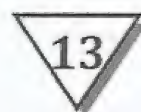
$$V(x) = \frac{6(16-\bar{x})^2 + 9(18-\bar{x})^2 + 10(20-\bar{x})^2 + 8(25-\bar{x})^2 + 5(30-\bar{x})^2 + 2(40-\bar{x})^2}{40} = \frac{S(\bar{x})}{40}$$

Or le montant en milliers DT du salaire moyen annuel est:  $\bar{x} = 22,2$ . C'est la valeur qui rend

minimale la fonction  $S$ . D'où  $V(x) = \frac{1438,4}{40} = 35,96$ .

Ainsi, la variance de la série statistique est

$$V(x) = 35,96 \text{ et l'écart-type est } s = \sqrt{35,96}.$$



## SE PERFECTIONNER

1°) a)

Classe 1 : Médiane : 9,5 ; étendue=13 ;

$$Q_1 = 6,5 ; Q_3 = 12,5.$$

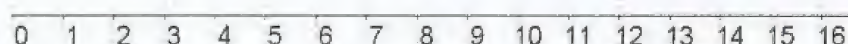
Classe 2 : Médiane : 7,75 ; étendue=13,5 ;

$$Q_1 = 4,5 ; Q_3 = 12,5$$

Classe 3 : Médiane : 8 ; étendue=13 ;

$$Q_1 = 3,5 ; Q_3 = 12,5$$

b)



c) Classe 1 :  $\bar{x} = 9,4$  ;  $s = 3,63$

Classe 2 :  $\bar{x} = 8,35$  ;  $s = 4,22$

Classe 3 :  $\bar{x} = 8,2$  ;  $s = 4,24$

d)

Classe 1 :  $[Q_1, Q_3]$  : 17 personnes : 57%

$[\bar{x} - s ; \bar{x} + s] = [5,77 ; 13,03]$  : 21 personnes : 70%

Classe 2 :  $[Q_1, Q_3]$  : 17 personnes : 57%

$[\bar{x} - s ; \bar{x} + s] = [4,13 ; 12,57]$  : 17 personnes : 57%

Classe 3 :  $[Q_1, Q_3]$  : 21 personnes : 70%

$[\bar{x} - s ; \bar{x} + s] = [3,96 ; 12,44]$  : 13 personnes : 43,3%

2°) a)

Classe 2 : médiane : 8,68 ;  $\bar{x} = 9,352$  ;  $s = 4,72$  ;

$$Q_1 = 5,04 ; Q_3 = 14$$

Classe 3 : médiane : 9,2 ;  $\bar{x} = 9,4$  ;  $s = 4,24$  ;

étendue = 13 ;  $Q_1 = 4,7$  ;  $Q_3 = 13,7$

Classe 2 :  $[Q_1, Q_3]$  : 17 personnes : 57%

$[\bar{x} - s ; \bar{x} + s] = [4,632 ; 14,072]$  : 17 personnes : 57%

Classe 3 :  $[Q_1, Q_3]$  : 21 personnes : 70%

$[\bar{x} - s ; \bar{x} + s] = [5,16 ; 13,64]$  : 13 personnes : 43,3%





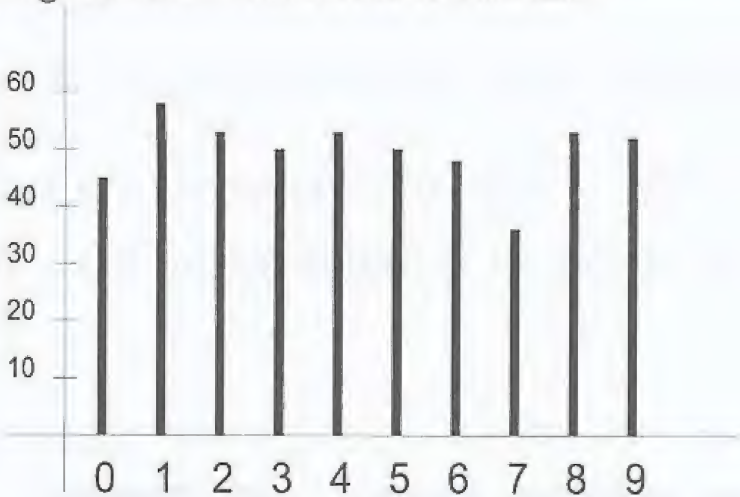
14

SE PERFECTIONNER

1) Les statistiques demandées concernant les 498 premières décimales de  $\pi$  conduisent au tableau ci-dessous :

décimale	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
effectif	45	58	53	50	53	50	48	36	53	52	498
fréquence	9	12	11	10	11	10	10	7	11	10	100

Le diagramme en bâton est le suivant :



2) a) L'étude pour  $\frac{22}{7}$  est très rapide car  $\frac{22}{7} =$

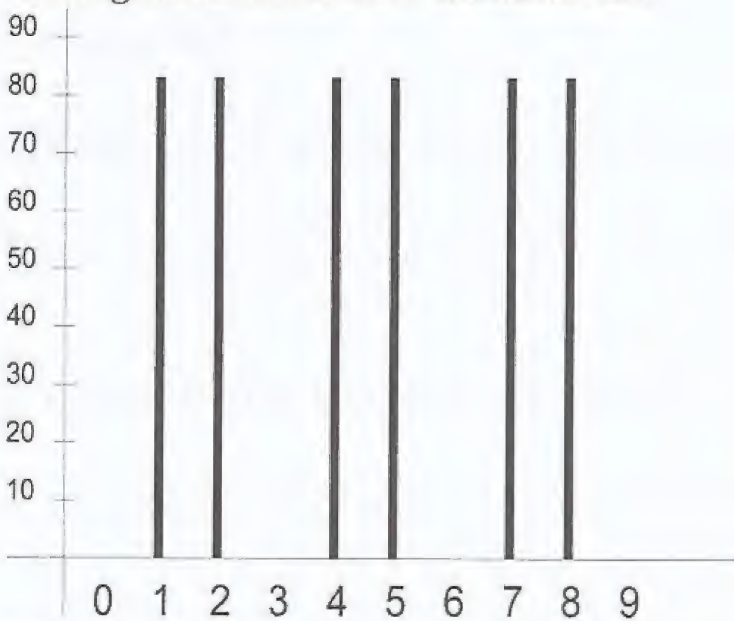
3,142857142857 (la période est 142857).

b) Si on veut 498 chiffres après la virgule, la période va donc se répéter 83 fois ( $498 \div 6 = 83$ ).

c) On obtient alors le tableau suivant :

décimale	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
effectif	0	83	83	0	83	83	0	83	83	0	498
fréquence	0	17	17	0	17	17	0	17	17	0	100

Le diagramme en bâton est le suivant :



3) On dispose actuellement de plus de *mille milliards* de décimales de  $\pi$  : tout ces chiffres ont été calculé par des ordinateurs très puissants et des techniques mathématiques extrêmement ingénieuses.

En gros, à raison de 50 lignes de 50 chiffres chacune, cela fait un livre énorme de 400 millions de pages environ ou si vous préférez, un million de

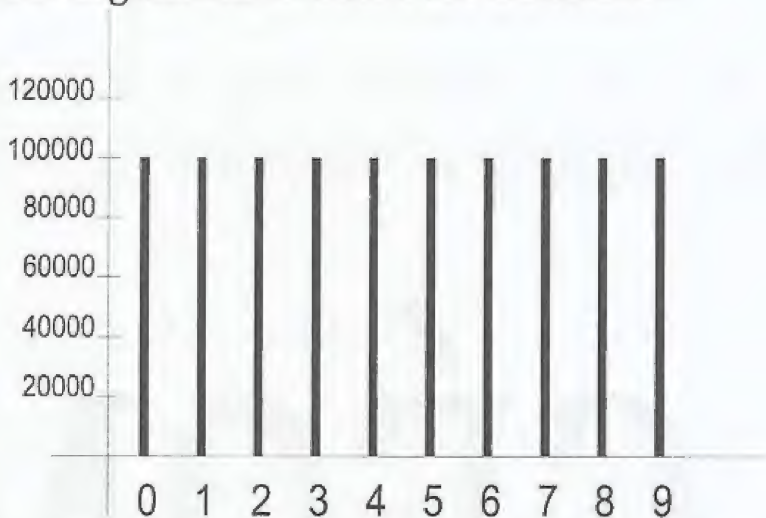
livres de 400 pages chacun. Largement de quoi remplir sa bibliothèque !

Personne ne peut directement prendre connaissance de cette énormité. Une étude statistique permet d'en faire une approche.

Pour le premier million de décimales de  $\pi$ , on a les résultats suivants : (source : *le nombre  $\pi$*  de l'Association pour le Développement de la Culture Scientifique) :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
99959	99758	100026	100229	100230	100359	99548	99800	99985	100106

Le diagramme en bâton est le suivant :



La répartition est à peu près équitable ! Il y a à peu près autant de 1 que de 2, que de 3, etc. Chaque chiffre de 0 à 9 est à peu près rencontré 100 000 fois (soit  $1\,000\,000/10$ ), à très peu près.

Les écarts à 100 000 sont d'ailleurs très faibles.

Un autre détail curieux : on a 5 chiffres très légèrement au-dessus de la moyenne (100000) et 5 au-dessous.  $\pi$  est en fait un nombre bien ordinaire...



# GÉOMETRIE





## Calculs vectoriels

### I) Résumé de cours

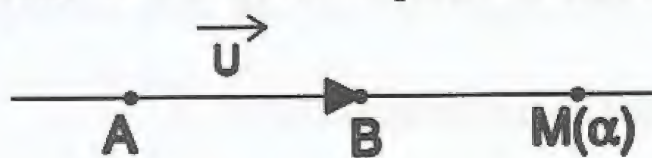
- La relation  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$  est appelée **la relation de Chasles** (vraie pour tous points A, B et C).

- Le milieu I d'un segment [AB] est défini par :  $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$  (ou encore :  $\vec{AI} = \vec{IB}$  )

- Soient un vecteur non nul  $\vec{u}$ , deux points A et B du plan tels que  $\vec{AB} = \vec{u}$  et un réel  $\alpha$ . On désigne par M le point de la droite (AB) d'abscisse  $\alpha$  dans le repère (A, B).

Le produit du vecteur  $\vec{u}$  par le réel  $\alpha$  est le vecteur  $\vec{v} = \vec{AM}$ .

On note  $\alpha \cdot \vec{u} = \vec{v}$  ou  $\alpha \cdot \vec{AB} = \vec{AM}$ . Si  $\vec{u} = \vec{0}$  alors pour tout réel  $\alpha$ ,  $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$ .



Lorsque  $\alpha = 0$  on a  $M = A$  et  $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$ .

$\left( \text{Deux vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \right)$  équivaut à  $\left( \text{il existe un réel } \alpha \text{ tel que } \vec{u} = \alpha \vec{v} \text{ ou } \vec{v} = \alpha \vec{u} \right)$

#### A) Propriétés de l'addition vectorielle et de la multiplication d'un vecteur par un réel :

- Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs du plan et  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels. On a :

$$\left( \vec{u} + \vec{v} \right) + \vec{w} = \vec{u} + \left( \vec{v} + \vec{w} \right); \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}; \quad \vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$$

- L'opposé du vecteur  $\vec{u}$  noté  $-\vec{u}$ , vérifie  $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ ;  $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$ .

- Pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$  et vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  on a :

$$(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}$$

$$\alpha \left( \beta \vec{u} \right) = (\alpha \cdot \beta) \vec{u}$$

$$\alpha \left( \vec{u} + \vec{v} \right) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$$

$$1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$$

#### B) Centre de gravité d'un triangle :

Soit ABC un triangle et G un point du plan. Une condition nécessaire et suffisante pour que G soit

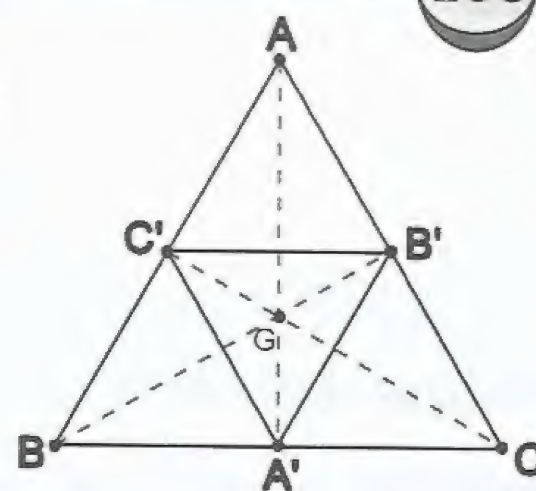




le centre de gravité du triangle ABC est :

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0},$$

ou bien  $\vec{A'G} = \frac{1}{3}\vec{A'A}$  où  $A'$  est le milieu de  $[BC]$ .



**C) Base** de l'ensemble des vecteurs du plan :

\* Soient  $V$  l'ensemble des vecteurs du plan et  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  deux vecteurs de  $V$ .

Si  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  ne sont pas colinéaires on dit que le couple  $(\vec{i}, \vec{j})$  est une **base**  $B$  de l'ensemble  $V$ .

**D) Composantes** d'un vecteur dans une base :

\* L'ensemble  $V$  des vecteurs du plan est muni d'une base  $B = (\vec{i}, \vec{j})$ .

Pour tout vecteur  $\vec{u}$  de  $V$ , il existe un couple  $(x, y)$  de réels et un seul tel que  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ . Le couple  $(x, y)$  est appelé couple des **composantes** du vecteur  $\vec{u}$  dans la base  $B$ . On note  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B$  ou plus simplement  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

• **Propriétés :**

\* Soient une base  $B$  de  $V$ ,  $\alpha$  un réel et les deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_B$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}_B$ . On a :

- $\left( \vec{u} = \vec{v} \right)$  équivaut à  $(a = a' \text{ et } b = b')$ .
- Le vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$  a pour composantes  $\begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix}_B$ .
- Le vecteur  $\alpha \vec{u}$  a pour composantes  $\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}_B$ .
- $\left( \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \right)$  équivaut à  $(a b' - b a' = 0)$ .

Le réel  $(a b' - b a')$  est appelé "déterminant" des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  dans la base  $B$ .

On note ce déterminant par  $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = a b' - b a'$ .

**E) Repère cartésien du plan :**

1) Soient  $O$  un point et  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  deux vecteurs du plan.



\* Le triplet  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est un repère cartésien du plan si  $(\vec{i}, \vec{j})$  est une base de  $V$  (c'est - à - dire si  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont deux vecteurs non colinéaires). Le point  $O$  est l'origine de ce repère.

2) Le plan est muni d'un repère cartésien  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ .

\* Pour tout point  $M$  du plan il existe un unique couple  $(x, y)$  de réels tels que  $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ .

Le couple  $(x, y)$  est appelé couple des coordonnées de  $M$  dans le repère  $R$ . On note :

$M(x, y)_{(O, \vec{i}, \vec{j})}$  et on a :  $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$  équivaut à  $M(x, y)_{(O, \vec{i}, \vec{j})}$ .

3) Soient deux points  $M(x_M, y_M)$  et  $N(x_N, y_N)$  dans le plan muni d'un repère cartésien

$R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Le vecteur  $\vec{MN}$  a pour composantes  $(x_N - x_M)$  et  $(y_N - y_M)$  dans la base

$B = (\vec{i}, \vec{j})$ . On note  $\vec{MN} \begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix}_B$ .

### F) Norme d'un vecteur – Vecteurs orthogonaux

1) Soit  $A$  un point du plan.

Soient  $\vec{u}$  un vecteur de  $V$  et  $M$  le point tel que  $\vec{AM} = \vec{u}$ .

La distance  $AM$  est appelée la norme du vecteur  $\vec{u}$  et on note  $\|\vec{u}\| = AM$ .

2) Soient un réel  $\alpha$  et un vecteur  $\vec{u}$  du plan, on a :  $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \|\vec{u}\|$ .

3) Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls du plan. On a  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ .

4) Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls du plan. On désigne par  $O, A$  et  $B$  les points tels que  $\vec{OA} = \vec{u}$  et  $\vec{OB} = \vec{v}$ . Si  $(OA) \perp (OB)$  on dit que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux.

\* Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.

### G) Base orthonormée – Repère orthonormé

1) Soit  $B = (\vec{i}, \vec{j})$  une base de  $V$ . Soit  $O$  un point du plan.

On désigne par  $I$  et  $J$  les points définis par  $\vec{OI} = \vec{i}$  et  $\vec{OJ} = \vec{j}$ .





On dit que la base  $B = (\vec{i}, \vec{j})$  est orthonormée si  $\begin{cases} (OI) \perp (OJ) \\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \end{cases}$

Dans ce cas, le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est un repère orthonormé du plan.

2) Le plan  $P$  est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On note  $B = (\vec{i}, \vec{j})$ .

\* Si  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_B$  alors  $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

\* Si  $M(x_M, y_M)$  et  $N(x_N, y_N)$  alors  $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$

\* Si  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_B$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}_B$  deux vecteurs. On a :

$\left( \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \right)$  équivaut à  $(a a' + b b' = 0)$ .

## II) Exercices



### VRAI-FAUX

1) Répondre, chaque fois, par vrai ou par faux en justifiant la réponse :

a) L'égalité  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$  signifie que ABCD est un parallélogramme.

b) Si le triangle ABC est isocèle en A, alors  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ .

c) Si  $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$  alors  $\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{BA}$ .

d) La relation  $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$  signifie que ABCD est un parallélogramme.

e) Soit ABC un triangle et les points I, J et K vérifiant  $5\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB}$ ,  $5\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CB}$ ; les triangles ABC et IJK ont leurs cotés parallèles deux à deux.

f) Soient E, F et G trois points du plan.

On a  $\overrightarrow{GE} - \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \vec{0}$ .

g) Soit  $\vec{u}$  un vecteur **de norme 2**.

2) **a** - Pour construire le vecteur  $a\vec{u}$ , avec  $a > 0$ , on construit un vecteur qui a même sens et même direction que  $\vec{u}$ .

**b** - Pour construire le vecteur  $b\vec{u}$ , avec  $b < 0$ , on construit un vecteur qui a un sens contraire de celui de  $\vec{u}$  et qui a pour norme  $b \cdot \|\vec{u}\|$ .



c - Le vecteur  $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{u}$  a mêmes direction et sens que le vecteur  $\vec{u}$ .

d - On a :  $\| -3\vec{u} \| = -6$ .

e - On a :  $-\frac{2}{3} \cdot \| -\vec{u} \| = -\frac{4}{3}$ .

## 2 APPLIQUER

On considère la figure ci-contre :

- 1). Exprimer  $\overrightarrow{AP}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AQ}$  en fonction de  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{BR}$  en fonction de  $\overrightarrow{BC}$ .
- 2) Exprimer  $\overrightarrow{PQ}$  et  $\overrightarrow{PR}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .
- 3) En déduire que  $\overrightarrow{PQ} = \frac{5}{8} \overrightarrow{PR}$  et interpréter ce résultat.

## 3 APPLIQUER

Soient A et B deux points distincts du plan.

- 1) Construire le point C du plan défini par :  $3\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$  (1).
- 2) Quelle peut-on conjecturer sur les points A, B et C ?
- 3) Etablir le résultat envisagé en montrant que  $\overrightarrow{AB}$  est colinéaire à  $\overrightarrow{AC}$ .

## 4 APPLIQUER

ABCD est parallélogramme de centre O, E est le milieu de [AB], F est le milieu de [CD]. Les droites (DE) et (BF) coupent la droite (AC) respectivement en L et M.

- a) Pourquoi L est-il le centre de gravité du triangle ABD ?
- b) Exprimer  $\overrightarrow{OL}$  en fonction de  $\overrightarrow{OA}$ .
- c) Prouver que  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ .
- d) Montrer alors que O est le milieu de [ML].

## 5 S'ENTRAINER

Soit A et B deux points fixes du plan. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tel que  $\overrightarrow{AM} = x \cdot \overrightarrow{AB}$  lorsque x varie dans l'intervalle  $[2, 4[$ .



**S'ENTRAINER**

Soit un triangle ABC.

- Construire les points I, J et K tels que :  $\vec{AI} = \vec{CB}$ ;  $\vec{AJ} = -2\vec{AI}$  et  $\vec{BK} = -2\vec{BI}$ .
- On pose  $\vec{CA} = \vec{u}$  et  $\vec{CB} = \vec{v}$ . Calculer  $\vec{CI}$ ,  $\vec{CJ}$  et  $\vec{CK}$  en fonction de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .
- Déduire des résultats précédents que  $\vec{CI} + \vec{CJ} + \vec{CK} = \vec{0}$ . Qu'en déduit-on pour le point C ?

**S'ENTRAINER**

$x$  étant un réel, les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x-1 \\ 2 \end{pmatrix}$  ;  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ x-2 \end{pmatrix}$  sont donnés par leurs

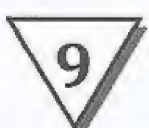
composantes dans la base  $B = (\vec{i}, \vec{j})$  de  $V$ .

Déterminer le réel  $x$  sachant que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

**S'ENTRAINER**

Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  on donne les points  $A(0, 2)$ ,  $B(4, 0)$  et  $C(-1, 0)$ .

- Calculer les composantes des vecteurs  $\vec{AC}$  et  $\vec{AB}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .
- Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

**S'ENTRAINER**

ABC est un triangle.

- Placer les points D et E tels que :  $\vec{AD} = \vec{AC} - \vec{AB}$  et  $\vec{AE} = \vec{AB} - \vec{AC}$ .
- Démontrer que A est le milieu de [ED].

**SEPERFECTIONNER**

Soit un triangle ABC.

On considère le point M tel que  $3\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC} = \vec{0}$ .

- Calculer  $\vec{AM}$  en fonction de  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ . Construire M.





b) Soit N le point défini par  $\vec{AN} = -\vec{AB} + 2\vec{AC}$ . Démontrer que A, M et N sont alignés.

**11****SEPERFECTIONNER**

$(O, \vec{i}, \vec{j})$  est un repère orthonormé du plan.

A(1,0) ; B(3,2) et C(-2,-1) des points du plan. On pose  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

1). Montrer que  $(\vec{u}, \vec{v})$  est une base de V.

2). Soit M le point du plan défini par  $\overrightarrow{OM} = \frac{3}{4} \vec{u} + \frac{1}{2} \vec{v}$ .

a) Montrer que ABMC est un parallélogramme.

b) Déterminer le périmètre de ce parallélogramme.

**12****SEPERFECTIONNER**

Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on donne les points suivants : A(2, 2) ; B(-2, 0) ; C(-2, 4) et E(-4, -1).

1) Placer les points A, B, C et E.

2) Calculer les coordonnées de I milieu de [BC]. Le construire.

3) Construire D tel que  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  et calculer ses coordonnées.

4) Démontrer que I est le milieu du segment [AD].

5) Démontrer que les droites (AE) et (DC) sont parallèles.

6) ABDC est – il un losange ? (Le démontrer)



## 1 VRAI-FAUX

a) L'égalité  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$  est fausse, elle est équivalente à

$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$ , soit  $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$  ou enfin  $\overrightarrow{CD} = \vec{0}$  c'est-à-dire les points

C et D sont confondus.

b)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$  sous entend que ces vecteurs ont même direction, ce qui est faux pourvu que ABC est un triangle, d'où l'égalité est fausse.

c) Cette implication est vraie (on prend l'opposé de chaque coté).

d)  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$ , d'où  $2 \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$ ,

Ainsi  $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC})$ , d'où l'égalité est vraie

e)  $5 \overrightarrow{AI} - 5 \overrightarrow{AJ} = 5 \overrightarrow{JI} = 3 \overrightarrow{AB} - 3 \overrightarrow{AC} = 3 \overrightarrow{CB}$  d'où (IJ) // (BC).

$5 \overrightarrow{AI} - 5 \overrightarrow{CK} = 5 \overrightarrow{KI} = 3 \overrightarrow{AB} - 2 \overrightarrow{CB} = 3 \overrightarrow{AB} - 2 \overrightarrow{AB} - 2 \overrightarrow{CA} = 2 \overrightarrow{AC}$  d'où (IK) // (AC). Terminer de même, et montrer que les droites (AB) et (JK) sont parallèle. L'affirmation est alors vraie.

f) Soient E, F et G trois points du plan. On a  $\overrightarrow{GE} - \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \vec{0}$ . Vrai

g) Soit  $\vec{u}$  un vecteur de norme 2.

2) a - Pour construire le vecteur  $a \cdot \vec{u}$ , avec  $a > 0$ , on construit un vecteur qui a même sens et

même direction que  $\vec{u}$ . Faux

b - Pour construire le vecteur  $b \cdot \vec{u}$ , avec  $b < 0$ , on construit un vecteur qui a un sens contraire de celui de  $\vec{u}$  et qui a pour norme  $b \cdot \|\vec{u}\|$ . Faux

c - Le vecteur  $\vec{w} = \frac{1}{2} \vec{u} - \frac{2}{3} \vec{u}$  a mêmes direction et sens que le vecteur  $\vec{u}$ . Faux

d - On a :  $\| -3 \cdot \vec{u} \| = -6$ . Faux

e - On a :  $-\frac{2}{3} \cdot \| -\vec{u} \| = -\frac{4}{3}$ . Vrai

## 2 APPLIQUER

1-  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{BR} = \frac{6}{5} \overrightarrow{BC}$

2-  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AC}$ ,

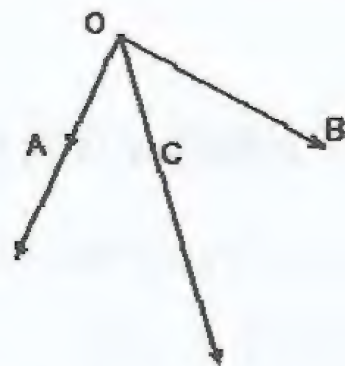
$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BR} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{6}{5} \overrightarrow{BC} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} +$

$\frac{6}{5} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{8}{15} \overrightarrow{AB} + \frac{6}{5} \overrightarrow{AC}$ .

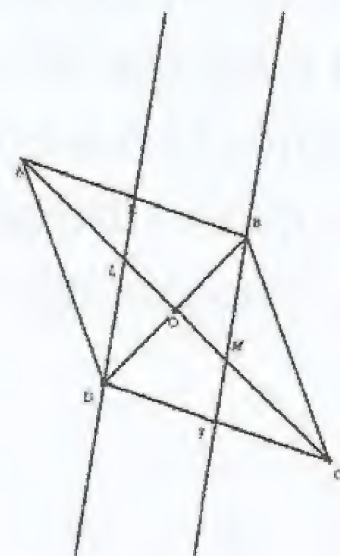
3- Vérifier alors que  $8 \overrightarrow{PQ} = 5 \overrightarrow{PR}$ .

## 3 APPLIQUER

3- Utilisons la relation de Chasles et intercalons le point A, on obtient  $3 \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$ , qui sont alors colinéaires, d'où les points A, B et C sont alignés.



## 4 APPLIQUER



a) Dans le triangle ABD :

[DE] et [AO] sont deux médianes et L est un point commun aux deux droites (DE) et (AO) donc L est le centre de gravité du triangle ABD.

b)  $\overrightarrow{OL} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OA}$ .

c) Dans le triangle BCD :

[BF] et [CO] sont deux médianes et M est un point commun aux deux droites (BF) et (CO) donc M est le



centre de gravité du triangle BCD et par suite on a :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OC}.$$

$$d) \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OL} = \frac{1}{3} (\underbrace{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}}_{\vec{0}}) = \vec{0} \Rightarrow O \text{ est le milieu}$$

du segment [LM].

### 5 S'ENTRAINER

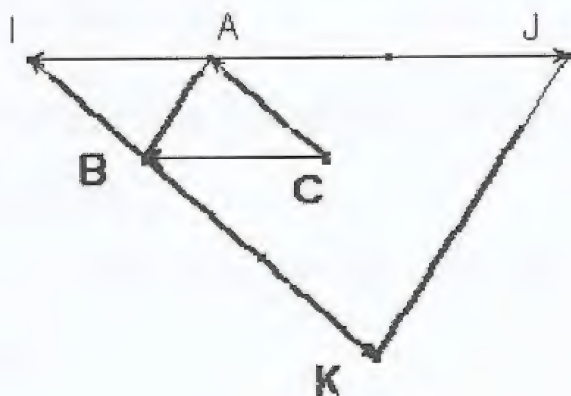
$\overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AB}$  signifie M d'abscisse x dans le repère (A,B)

Soient  $M_1$  et  $M_2$  les points de (AB) tels que  $\overrightarrow{AM_1} = 2 \overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AM_2} = 4 \overrightarrow{AB}$ .

M décrit alors le segment  $[M_1 M_2]$ .

### 6 S'ENTRAINER

a-



b- On a :  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CB}$  donc AIBC est un parallélogramme, d'où  $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \vec{u} + \vec{v}$

$$\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AJ} = \vec{u} - 2 \vec{v} ;$$

$$\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BK} = -2 \vec{u} + \vec{v}$$

c- On vérifie, alors, que  $\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{CK} = \vec{0}$  donc C représente le centre de gravité du triangle IJK.

### 7 S'ENTRAINER

On applique la propriété :

$$\left( \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \right)$$

On a :  $(x-1)(x-2) - 2 = 0$  équivaut à  $x^2 - 3x = 0$  équivaut à  $x(x-3) = 0$  équivaut à  $x = 0$  ou  $x = 3$ .

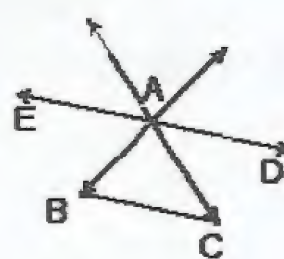
### 8 S'ENTRAINER

$$1) \vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} ; \vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

2) On a  $(-1) \times 4 + (-2) \times (-2) = 0$  donc les deux vecteurs  $\vec{AC}$  et  $\vec{AB}$  sont orthogonaux et par conséquent le triangle ABC est rectangle en A.

### 9 S'ENTRAINER

1-



2-

$$\overrightarrow{AE} = - \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = \vec{0} \text{ donc A est le milieu de } [ED].$$

### 10 SE PERFECTIONNER

$$2 \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - 2 \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AN} = - \overrightarrow{AB} + 2 \overrightarrow{AC}$$

$$2 \overrightarrow{AM} = - \overrightarrow{AN} \text{ d'où A, M et N sont alignés}$$

### 11 SE PERFECTIONNER

$$1) \text{ On a } \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} ; \vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et on voit qu'ils ne sont}$$

pas colinéaires (car  $2 \times (-1) - 2 \times (-3) = 4$  non nul)

Par conséquent  $(\vec{u} ; \vec{v})$  est une base de l'ensemble V des vecteurs du plan.

$$2) a) \text{ On a } \overrightarrow{OM} = \frac{3}{4} \vec{u} + \frac{1}{2} \vec{v} \text{ d'où } \vec{OM} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire M(0, 1).

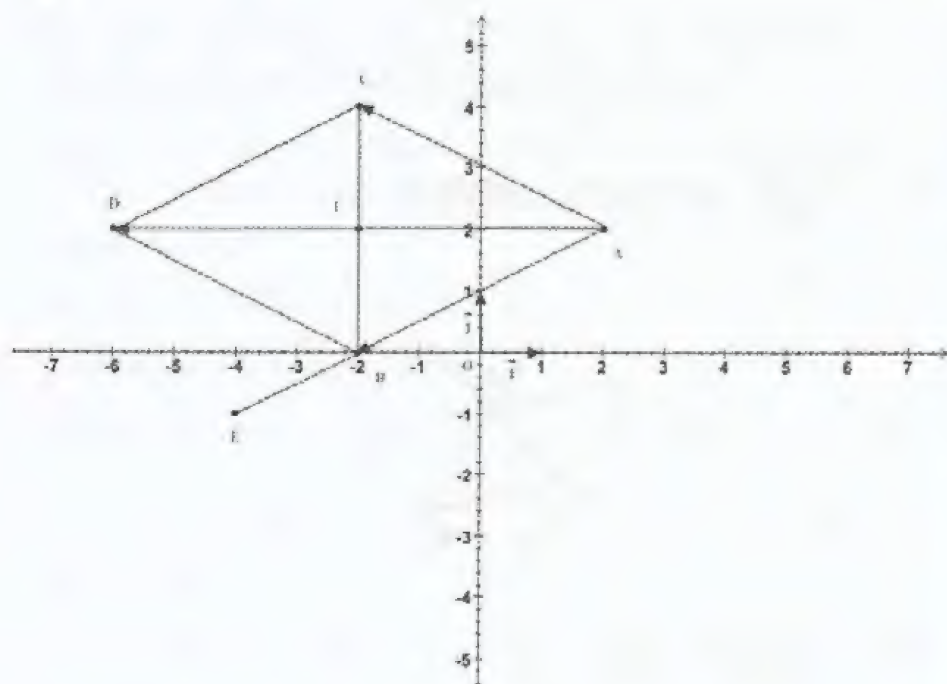
$\vec{BM} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{AC}$  donc ABMC est un parallélogramme.



b) On a  $AB = 2\sqrt{2} = CM$  et  $AC = \sqrt{10} = BM$   
donc le périmètre du parallélogramme ABMC est  
égale à  $4\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$ .

## 12 SE PERFECTIONNER

1.



2. I est le milieu de [BC]

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-6 - 2}{2} = -4 \\ y_I = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow I(-4, 3)$ .

3.  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$  ABDC est un  
parallélogramme.

Soit  $D(x, y)$ ,  $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}$  et

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = -8 \\ y-2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 4 \end{cases}$$

D'où  $D(-6, 4)$ .

4. ABDC est un parallélogramme  $\Leftrightarrow [AD]$  et  
[BC] ont même milieu  $\Rightarrow I$  est le milieu de [AD].

$$5. \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DC}) = \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AE}$  et  $\overrightarrow{DC}$  sont colinéaires

$\Rightarrow (AE) \parallel (DC)$ .

6. ABDC est un parallélogramme

De plus

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-8)^2 + 0^2} = \sqrt{64} = 8$$

$$\text{et } AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$\Rightarrow$  ABDC est un losange.





## Barycentre

### I) Résumé de cours

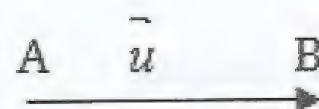
#### A) Norme d'un vecteur

##### Définition :

Soit  $\vec{u}$  un vecteur et  $\overrightarrow{AB}$  un représentant de  $\vec{u}$ .

La norme de vecteur  $\vec{u}$  est le réel positif définie par

$$\|\vec{u}\| = AB$$



##### Propriétés :

- $\|\vec{0}\| = 0$
- $\|-\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$
- $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{u}\|$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

#### B) Barycentre de deux points pondérés:

##### 1) Définition :

G est le barycentre des points pondérés (A,  $\alpha$ ) et (B,  $\beta$ ) signifie  $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

##### Remarques :

- G existe si  $\alpha + \beta \neq 0$
- On a : G, A et B sont alignés
- Si  $\alpha = \beta$  alors  $G = A*B$
- $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$  (construction de G)

des points A et B affectés des masses  $\alpha$  et  $\beta$

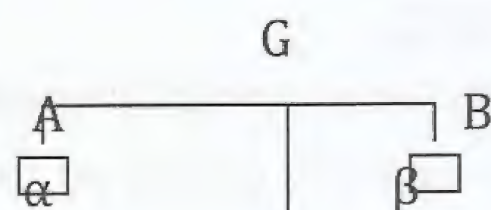
##### 2) Propriétés :

##### Propriété 1 :

Si et  $k \in \mathbb{R}^*$  alors G est le barycentre des points pondérés (A,  $k\alpha$ ) (B,  $k\beta$ ).

##### Propriété 2 :

Si  $\alpha + \beta \neq 0$  alors pour tout point M du plan on a :  $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$  avec G est le barycentre des points pondérés (A,  $\alpha$ ) et (B,  $\beta$ )



G et le point d'équilibre





**Exemple :**

$2\overrightarrow{MK} - 5\overrightarrow{MN} = (2 + (-5))\overrightarrow{MG}$  avec G est le barycentre des points pondérés (K, 2) et (N, -5)

**Remarque :**

On a G est le barycentre des points pondérés (A,  $\alpha$ ) (B,  $\beta$ ) signifie

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$$

D'où G est le point d'abscisse  $x_G = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$  dans le repère (A,  $\overrightarrow{AB}$ )

En particulier :  $G \in [AB]$  si  $x_G \geq 0$

$G \in [AB]$  si  $0 \leq x_G \leq 1$  ( $G \in [AB]$  si  $\alpha$  et  $\beta$  sont de même signe)

**C) Barycentre de trois points pondérés:**

**1) Définition :**

G est le barycentre des points pondérés (A,  $\alpha$ ), (B,  $\beta$ ) et (C,  $\gamma$ ) signifie

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

**Remarques :**

- G existe si  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$
- Si  $\alpha = \beta = \gamma$  alors G est le centre de gravité du triangle ABC

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AC} \quad (\text{construction de G})$$

**2) Propriétés :**

**Propriété 1 :**

Si G est le barycentre des points pondérés (A,  $\alpha$ ), (B,  $\beta$ ) et (C,  $\gamma$ ) et  $k \in \mathbb{R}^*$  alors G est le barycentre des points pondérés (A,  $k\alpha$ ) (B,  $k\beta$ ). (C,  $k\gamma$ )

**Propriété 2 :**

Si  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$  alors pour tout point M du plan on a :

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}$$

avec G est le barycentre des points pondérés (A,  $\alpha$ ) et (B,  $\beta$ ) et (C,  $\gamma$ )

**Exemple :**

$2\overrightarrow{MK} - 5\overrightarrow{MN} + 7\overrightarrow{MH} = (2 + (-5) + 7)\overrightarrow{MG} = 4\overrightarrow{MG}$  avec G est le barycentre des points pondérés (K, 2), (N, -5) et (H, 7)

**D) Exemples d'ensembles de points :**

A et B deux points donnés

- $MA = MB$  signifie M appartient à la médiatrice de [AB].
- $MA = 2$  signifie M appartient au cercle C (A, 2)



- $MA = AB$  signifie  $M$  appartient au cercle  $C(A, AB)$ .
- $AM \leq 2$  signifie  $M$  appartient au disque fermé de centre  $A$  et de rayon 2
- $AM < 2$  signifie  $M$  appartient au disque ouvert de centre  $A$  et de rayon 2
- $2 \leq AM \leq 3$  signifie  $M$  appartient à la couronne limitée par  $C(A, 2)$  et  $C'(A, 3)$
- $MA^2 + MB^2 = AB^2$  signifie  $M$  appartient au cercle  $C$  de diamètre  $[AB]$
- $MA + MB = AB$  signifie  $M$  appartient au segment  $[AB]$ .

## II) Exercices

### 1 Q-C-M

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est exacte. Indiquer le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

1) Soit  $x$  un réel, le barycentre  $G$  des points pondérés  $(A, x)$   $(B, x-1)$  existe si :

- a)  $x \neq 1$     b)  $x \neq 0$     c)  $x \neq \frac{1}{2}$

2) Si  $\overrightarrow{BA} = 5\overrightarrow{BC}$  alors  $A$  est le barycentre des points pondérés

- a)  $(B, 1) ; (C, 5)$     b)  $(B, -4) ; (C, 5)$     c)  $(B, 4) ; (C, 5)$

3) Soit  $A, B$  et  $G$  trois points tels que  $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$ . On a  $G$  est le barycentre des points pondérés

- a)  $(A, -2) ; (B, 1)$     b)  $(A, 1) ; (B, 2)$     c)  $(A, 2) ; (B, 1)$

4) Soit  $A, B$  et  $G$  trois points tels que  $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$ . On a  $B$  est le barycentre des points pondérés

- a)  $(A, 1) ; (G, 3)$     b)  $(A, 3) ; (G, 1)$     c)  $(A, 1) ; (G, -3)$

5)



On a  $G$  est le barycentre des points pondérés

- a)  $(A, 2) ; (B, 5)$     b)  $(A, 5) ; (B, 5)$     c)  $(A, 7) ; (B, -2)$

6) Si  $G$  est le barycentre des points pondérés  $(A, 6) ; (B, -12)$

Alors  $G$  est le barycentre des points pondérés

- a)  $(A, 2) ; (B, 4)$     b)  $(A, 4) ; (B, -8)$     c)  $(A, 12) ; (B, -32)$

7) Si  $G$  est le barycentre des points pondérés  $(A, x) ; (B, 2)$  avec  $x > -2$  alors

- a)  $G \in [AB)$     b)  $G \in [BA)$     c)  $G \in [AB]$





8) Si G est le barycentre des points pondérés  $(A, x)$  ;  $(B, x-1)$  on a :  $G \in [AB]$  si :

- a)  $x > 0$       b)  $x < 1$       c)  $x \in [0, 1]$       d)  $x \in ]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$

9) Soient A et B deux points distincts du plan et

$$E = \left\{ M \in P \text{ tel que } \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| \right\}.$$

L'image E' par une translation de l'ensemble E est :

- a) Une droite    b) un cercle    c) un disque    d) l'ensemble vide

10) Soit ABC un triangle et I le milieu de  $[AB]$  du plan et L'ensemble

$$E = \left\{ M \in P \text{ tel que } \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AJ}\| \right\} \text{ est :}$$

- a) Une droite    b) un cercle    c) un disque    d) l'ensemble vide

11) On considère le levier ci contre



Le point d'équilibre du levier est : a) B      b) C    c) D



## Q-C-M

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est exacte. Indiquer le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

1) Le barycentre G des points pondérés  $(A, m^2)$   $(B, -6m)$ ,  $(C, 5)$  existe si

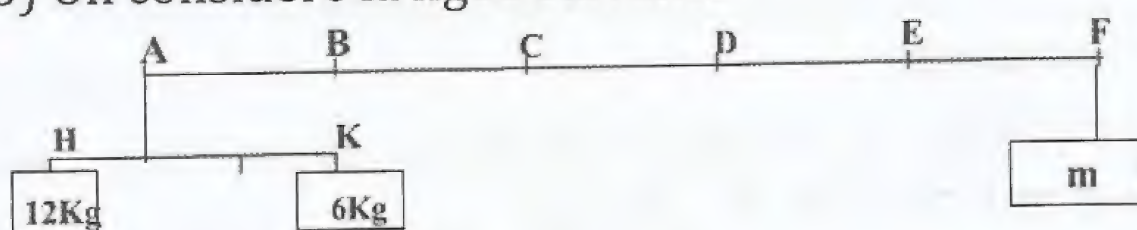
- a)  $m \in ]-\infty, 1[ \cup ]5, +\infty[$     b)  $m \in [1, 5]$     c)  $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 5\}$     d)  $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -5\}$

2) Soit ABC un triangle

L'ensemble des points M du plan tel que  $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\|$  est :

- a) Une droite    b) un cercle    c) un disque    d) l'ensemble vide

3) On considère la figure suivante



Pour que le point d'équilibre du levier représenté par le segment  $[AF]$  soit le point B il faut que :

- a)  $m = 18 \text{ Kg}$       b)  $m = 6 \text{ Kg}$       c)  $m = 4,5 \text{ Kg}$       d)  $m = 8 \text{ Kg}$



### 3 APPLIQUER

Soit A et B deux points construire le barycentre G des points pondérés (A,2) et (B,3)

### 4 APPLIQUER

- 1) Pour quelles valeurs de m le barycentre G des points pondérés (A, m+1), (B, m+3) existe-t-il ?
- 2) Pour quelles valeurs de m on a  $G \in [AB]$
- 3) Soit C le point tel que  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$  pour quelles valeurs de m on a  $G \in [BC]$ .

### 5 APPLIQUER

Transformer les écritures suivantes en un seul vecteur :

- 1)  $2\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB}$
- 2)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$
- 3)  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$

### 6 APPLIQUER

Soient ABC un triangle et I le barycentre des points pondérés (A, 1) (B, 3)

Soit G le point tel que  $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$  et

Montrer que G est le barycentre des points pondérés I et C affectés des coefficients que l'on précisera.

### 7 APPLIQUER

Soient ABCD un parallélogramme de centre O et I le barycentre des points pondérés (A, 1) (C, 3). Soit G le point tel que  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$  Montrer que les points I, G et O sont alignés.

### 8 APPLIQUER

Soit G le barycentre des points pondérés (A,2) et (B,3).

Déterminer les réels  $\alpha$  et  $\beta$  tel que  $\alpha + \beta = 1$  et G soit le barycentre de (A,  $\alpha$ ) et (B,  $\beta$ ).

### 9 APPLIQUER

Soit ABCD un quadrilatère. Déterminer et construire les ensembles suivants :

$$E_0 = \{M \in P \text{ tel que } \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|2\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB}\|\}$$

$$E_1 : \{M \in P \text{ tel que } \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}\|\}$$

$$E_3 = \{M \in P \text{ tel que } \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| \leq 3\}$$



### 10 APPLIQUER

ABC est un triangle rectangle et isocèle en A. On considère les points :

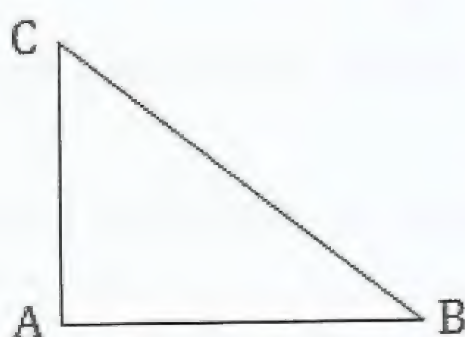
L barycentre de (A,1) et (C,3) ; N isobarycentre de B et C ; M tel que :  $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MA}$

- 1) Placer les points L et N
- 2) Montrer que M est le barycentre des points A et B pondérés par des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  que l'on précisera et construire le point M.
- 3) On considère maintenant le repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  On pose  $AB=1$ 
  - a) Quelle est la nature de ce repère.
  - b) Déterminer les coordonnées de L, M et N dans ce repère et montrer que L, M et N sont alignés.

4) Déterminer les ensembles :

$$\Gamma = \left\{ M \in P; \|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC}\| = 2 \right\}$$

$$\Gamma' = \left\{ M \in P; \|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC}\| \leq 2 \text{ et } \|\overrightarrow{AM}\| + \|\overrightarrow{MC}\| = 1 \right\}$$



### 11 APPLIQUER

Soit ABC un triangle .O=A\*B

E le barycentre des points pondérés (B,3) ;(C,2)

- 1) Construire E
  - 2) Soit I le point tel que  $3\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$
- Montre que (AE) et (OC) sont sécantes en I

### 12 APPLIQUER

L'unité étant le cm on donne un triangle ABC tel que  $AB=5$  ,  $AC=3$  ,  $BC=6$  et  $I = A*B$

- 1) a) Construire le point J barycentre des points pondérés (A,3) et (B,2)
- b) Construire le point K est le barycentre des points pondérés (B,2) et ( C, 3)
- 2) Montrer que I est le barycentre des points pondérés (A,1) et (J, - 5).



3) Soit l'ensemble  $E = \{ M, M \in P \text{ et } \|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = 5\|\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB}\| \}$

a) Montrer que  $A \notin E$ .

b) Déterminer et construire l'ensemble E.

4) Déterminer et construire l'ensemble :

$$F = \{ M, M \in P \text{ et } \|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\|^2 + \|2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\|^2 = 25JK^2 \}$$

### 13 APPLIQUER

ABC un triangle  $A' = B * C$   $B' = A * C$   $C' = A * B$

Soit M le barycentre des points pondérés (A,2) (B,1) et G les points définies par :

$$2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

1) Montrer que  $G = A * A'$  et faire une figure.

2) Montrer que  $G = B' * C'$ .

3) Montrer que G est le barycentre des points pondérés (M, 3) et (C, 1).

4) En déduire que (AA') (B'C') et (CM) sont concourantes.

### 14 APPLIQUER

Soit A, B et C trois points construire le barycentre G des points pondérés (A,2) , (B,3) et (C,1)

### 15 APPLIQUER

Simplifier en un seul vecteur

$$1) 2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} - 5\overrightarrow{KC} \quad 2) 2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} + 4\overrightarrow{KC}$$

### 16 S'ENTRAINER

L'unité de longueur étant le cm, on considère le triangle ABC vérifiant:  $AB = 8$ ,  $BC = 5$  et  $CA = 4$

On considère le point R barycentre de (A ; 3) et (C ; 1) et le point Q barycentre de (A ;3) et (B ;1)

1) a) Construire les points Q et R.

b) Soit G le point défini par  $3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Montrer que les droites (BR) et (CQ) sont sécantes en G

2) Soit I le milieu de [BC] .Montrer que les points A,G et I sont alignés.



3) Déterminer et construire les ensembles suivants :

$$E = \left\{ M \in P \text{ tels que } \left\| 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \right\| \right\}$$

$$F = \left\{ M \in P \text{ tels que } \left\| 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} \right\| \right\}$$

## 17 S'ENTRAINER

Soit ABC un triangle et G le barycentre des points pondérés (A,  $m^2-2$ ) et (B,  $3m-2$ ) avec m un paramètre réel

1) a) Pour quelles valeurs de m le barycentre G existe ?

b) Pour quelles valeurs de m le point  $G \in [AB)$  ?

2) On suppose dans toute la suite que  $m = 2$ .

a) Construire le point G sur la figure (1)

b) Soit K le barycentre des points pondérés (A,1) , (B,2) et (C,3) , montrer que le point K est le milieu du segment  $[GC]$ .

3) On donne les ensembles suivants :

$$C_1 = \left\{ M \in P / \left\| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} \right\| = 3 \left\| 2\overrightarrow{MK} - 2\overrightarrow{MB} \right\| \right\}$$

$$C_2 = \left\{ M \in P / \left\| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} \right\| = 3 \left\| \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MG} \right\| \right\}$$

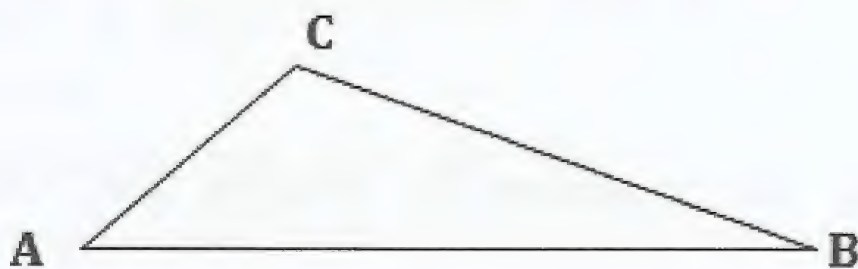
a) Déterminer et construire sur la figure 1 chacun de ces ensembles  $C_1$  et  $C_2$

b) En déduire l'ensemble  $\Gamma$  :

$$\Gamma = \left\{ M \in P / 3 \left\| \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MG} \right\| \leq \left\| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} \right\| \leq 3 \left\| 2\overrightarrow{MK} - 2\overrightarrow{MB} \right\| \right\}$$

Hachurer sur la figure (1) l'ensemble  $\Gamma$

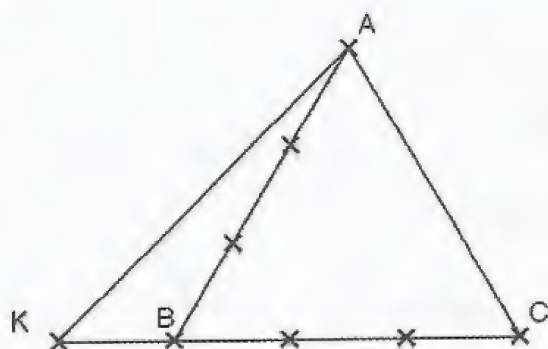
Figure 1



## 18 SEPERFECTIONNER

Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle et les divisions sur les cotés sont régulières





- 1) a) Ecrire B comme barycentre de K et C
- b) Ecrire G comme barycentre de A et B
- c) Montrer alors que *G est barycentre des points pondérés (A,8),(K,3),(C,1)*
- 2) Soit  $I = \text{bary}\{(A,8),(K,3)\}$ 
  - a) Montrer que I,G et C sont alignés
  - b) Construire alors le point I
- 3) a) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que :
 
$$\|8\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MC}\| = \|12\overrightarrow{MA} - 12\overrightarrow{MG}\|$$
  - b) Déterminer l'ensemble (F) des points M du plan tels que :
 
$$8\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MC} \text{ est orthogonal à } 8\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MK}$$
- 4) La droite (KG) coupe (AC) en J  
Ecrire J comme barycentre de A et C

**SEPERFECTIONNER**

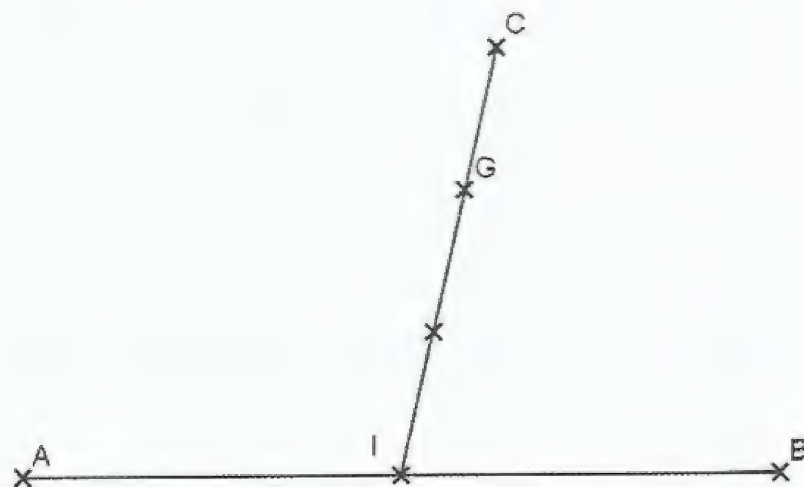
Soit ABCD un parallélogramme, on définit les points P et Q par :

- $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
  - Q le symétrique du milieu de  $[AD]$  par rapport à A
- 1) Faire une figure
  - 2) a) Démontrer que P est le barycentre des points pondérés (A,2) et (B,1)
  - b) Exprimer Q comme barycentre des points (A,a) et (D,b) où a et b des réels que l'on déterminera.
  - 3) a) Justifier que C est le barycentre des points pondérés (A,1), (B,-1) et (D,-1)
  - b) Compléter :  $2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \dots$   
 $3\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CD} = \dots$
  - c) En déduire que les points C,P et Q sont alignés





20

**SEPERFECTIONNER**

- 1) Ecrire G comme barycentre des points I et C
- 2) En déduire que G est le barycentre des points pondérés (A,1) (B,1) et (C,4)
- 3) a) Ecrire A comme barycentre des points I et B
- b) Déterminer et construire les ensembles suivants :

$$E = \left\{ M \in P \text{ tel que } \left\| 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MI} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| \right\}$$

$$F = \left\{ M \in P \text{ tel que } \frac{\left\| 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} \right\|}{\left\| \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MI} \right\|} = \frac{2\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \right\|}{\left\| \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MI} \right\|} \right\}$$



# 1 Q-C-M

- 1)c) 2)b) 3)b) 4)c) 5)c) 6)b)  
7)a) 8)d) 9)b) 10)b) 11)c)

**En effet :**

1) G existe si  $x + (x-1) \neq 0$  si  $2x-1 \neq 0$  si  $x \neq \frac{1}{2}$

2) Si  $\overrightarrow{BA} = 5\overrightarrow{BC}$  alors  $\overrightarrow{BA} = 5(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

alors  $4\overrightarrow{BA} + 5\overrightarrow{AC} = \vec{0}$  alors  $-4\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

alors A est le barycentre des points pondérés (B,-4) ; (C,5)

3) On a :  $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$  alors  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$  alors G

est le barycentre des points pondérés

(A,1) ; (B,2)

4) On  $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$  alors B est le barycentre des

points pondérés (A,1) ; (G,-3)

5)



On a  $\overrightarrow{GB} = \frac{7}{2}\overrightarrow{GA}$  alors  $2\overrightarrow{GB} = 7\overrightarrow{GA}$  alors

$$7\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

Alors G est le barycentre des points pondérés (A,7) ; (B,-2)

6) Si G est le barycentre des points pondérés (A,6) ; (B,-12)

Alors G est le barycentre des points pondérés (A,  $6 \times \frac{2}{3}$ ) ; (B,  $-12 \times \frac{2}{3}$ )

Alors G est le barycentre des points pondérés (A,4) (B, -8)

7) Si G est le barycentre des points pondérés (A,

x) ; (B,2) alors  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{2+x}\overrightarrow{AB}$

On a si  $x > -2$  alors  $\frac{2}{2+x} > 0$  alors  $G \in [AB)$

8) On a :  $G \in [AB]$  si  $\alpha\beta \geq 0$  si  $x(x-1) \geq 0$

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$x$		-	0	+	
$x-1$		-	-	0	+
$x(x-1)$		+	-	+	

D'où  $G \in [AB]$  si  $x \in ]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$

9)  $M \in E$  signifie  $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$

signifie  $\|2\overrightarrow{MI}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM}\|$  signifie  $2MI=BA$

signifie  $IM = \frac{AB}{2}$  signifie M appartient au cercle de

centre I et de rayon  $\frac{AB}{2}$ .

10) Soit ABC un triangle et I le milieu de [AB] du plan et L'ensemble

$E = \{M \in P \text{ tel que } \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AJ}\|\}$  est :

$M \in E$  signifie  $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AJ}\|$

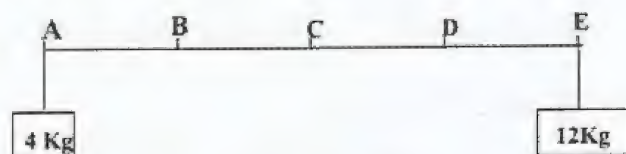
signifie  $\|2\overrightarrow{MI}\| = \|\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AJ}\|$

signifie  $\|2\overrightarrow{MI}\| = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}\|$

signifie  $2MI=BJ$  signifie  $MI = \frac{BJ}{2}$

signifie M appartient au cercle de centre I et de rayon  $\frac{BJ}{2}$ .

11)



Soit G le point d'équilibre du levier

On a G est le barycentre des points pondérés (A,4) (E,12)

Alors  $\overrightarrow{AG} = \frac{12}{16}\overrightarrow{AE}$  alors  $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$  alors  $G = D$

# 2 Q-C-M

- 1) c) 2)b) 3)c)

**En effet**

1) Le barycentre G des points pondérés (A,  $m^2$ ) (B,  $-6m$ ) (C, 5) existe si  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

Si  $m^2 - 6m + 5 \neq 0$  si  $m \neq 1$  et  $m \neq 5$  si  $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 5\}$

2)  $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\|$

signifie  $\|4\overrightarrow{MG}\| = 4\|\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}\|$  avec G est le barycentre (A,1) (B,1), (C,2)

signifie  $4MG = 4BA$

signifie  $MG = BA$

Signifie M appartient au cercle de centre G et de rayon AB





3)



Pour que le point d'équilibre du levier représenté par le segment  $[AF]$  soit le point B il faut que :  
 $(12+6)AB = mBF$  alors  $18AB = m \times 4AB$   
 alors  $m = 4,5\text{Kg}$

3

**APPLIQUER**

G est le barycentre des points pondérés  $(A,2)$  et  $(B,3)$  signifie  $\vec{AG} = \frac{3}{2+3} \vec{AB} = \frac{3}{5} \vec{AB}$



4

**APPLIQUER**

1/ G existe si  $(m+1) + (m+3) \neq 0$   
 Si  $2m+4 \neq 0$   
 Si  $m \neq -2$   
 Si  $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

2/  $G \in [AB]$  signifie  $\alpha\beta \geq 0$   
 signifie  $(m+1)(m+3) \geq 0$

$m$	$-\infty$	$-3$	$-1$	$+\infty$
$m+1$	-	-	0	+
$m+3$	-	0	+	+
$(m+1)(m+3)$		0	-	0

D'où  $G \in [AB]$  signifie  $m \in ]-\infty, -3] \cup [-1, +\infty[$

5

**APPLIQUER**

1/  $2\vec{MA} - 5\vec{MB} = (2 + (-5))\vec{MG} = -3\vec{MG}$  avec  
 G est le barycentre de  $(A,2)$   $(B,-5)$   
 2/  $\vec{MA} + \vec{MB} = (1+1)\vec{MI} = 2\vec{MI}$  avec  $I = A * B$   
 3/  $\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{MA} + \vec{BM} = \vec{BM} + \vec{MA} = \vec{BA}$

6

**APPLIQUER**

Montrons que  $\alpha\vec{GI} + \beta\vec{GC} = \vec{0}$  ?

On a :  $\vec{GA} + 3\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

Signifie  $(1+3)\vec{GI} + \vec{GC} = \vec{0}$  car G est le barycentre de  $(A,1), (B,3)$

Signifie  $4\vec{GI} + \vec{GC} = \vec{0}$

Signifie G est le barycentre de  $(I,4)(C,1)$

7

**APPLIQUER**

On a  $\vec{GA} + \vec{GB} + 3\vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$

Alors  $\vec{GA} + 3\vec{GC} + \vec{GB} + \vec{GD} = \vec{0}$

Alors  $(1+3)\vec{GI} + 2\vec{GO} = \vec{0}$  car I est le barycentre de  $(A,1)(C,3)$

O est le milieu de  $[BD]$

Alors  $4\vec{GI} + 2\vec{GO} = \vec{0}$

Alors  $2\vec{GI} + \vec{GO} = \vec{0}$

Alors G est le barycentre de  $(I,2)(O,1)$  alors G, I et O sont alignés.

8

**APPLIQUER**

On a G le barycentre de  $(A,2)(B,3)$

Alors G est le barycentre de  $(A,2k)$  et  $(B,3k)$ ,  
 $k \in \mathbb{R}^*$

Si  $(2k) + (3k) = 1$  alors  $5k = 1$  alors  $k = \frac{1}{5}$

D'où G est le barycentre de  $\left(A, \frac{2}{5}\right) \left(B, \frac{3}{5}\right)$

9

**APPLIQUER**

•  $M \in E_0$  signifie  $\|\vec{MA} + \vec{MB}\| = \|2\vec{MA} - 4\vec{MB}\|$

Signifie  $\|2\vec{MI}\| = \|(2-4)\vec{MG}\|$  avec  $I = A * B$

Signifie  $\|2\vec{MI}\| = 2\vec{MG}$

G barycentre de  $(A,2)(B,-4)$

Signifie  $\vec{MI} = \vec{MG}$

Signifie M appartient à  $\Delta$  la médiatrice de  $[IG]$

Conclusion :  $E_0 = \Delta$





•  $M \in E_1$  signifie  $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}\|$

Signifie  $\|\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA}\| = \|(3+1)\overrightarrow{MG'}\|$

avec  $G'$  est le barycentre.

Signifie  $\|\overrightarrow{CA}\| = \|4\overrightarrow{MG'}\|$  de  $(A,3)(D,1)$

Signifie  $CA = 4MG'$

Signifie  $MG' = \frac{CA}{4}$

Signifie  $M \in \mathcal{C}\left(G', \frac{CA}{4}\right)$

D'où  $E_1 = \mathcal{C}\left(G', \frac{CA}{4}\right)$

•  $M \in E_3$  signifie  $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| \leq 3$

Signifie  $\|(2+1)\overrightarrow{MG''}\| \leq 3$

avec  $G''$  est le barycentre de  $(A,2)(B,1)$

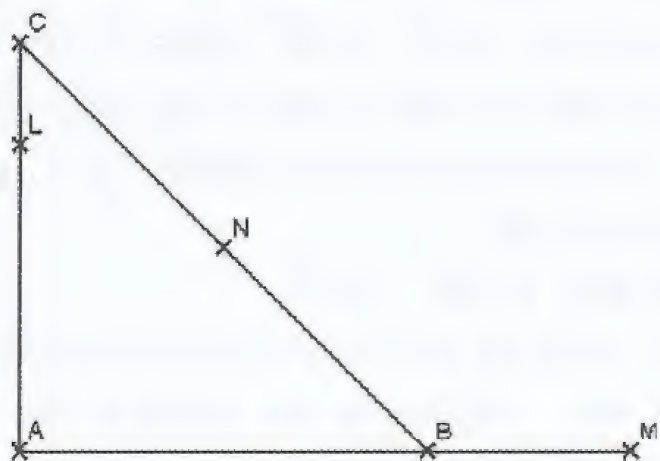
Signifie  $3MG'' \leq 3$

Signifie  $MG'' \leq 1$

Signifie M appartient au disque fermé D de centre  $G''$  est de rayon 3.



## 10 APPLIQUER



1) L est le barycentre de  $(A,1)(C,3)$  alors

$$\overrightarrow{AL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$N = B * C$$

2)

$$\overrightarrow{MB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MA}$$

$$\text{équivalent } 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}$$

$$\text{équivalent } \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

Alors M est le barycentre de  $(A,1)(B,-3)$

$$\text{Alors } \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

3) a) \* On a  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

\* On a  $AB = AC = 1$

Alors R est un repère orthonormé

b) On a

$$\overrightarrow{AL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \text{ alors } L\left(0, \frac{3}{4}\right)$$

On a  $O' = h(O)$

$$\text{alors } \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \text{ alors } M\left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

On a :  $N = B * C$  et  $B(1,0)$ ,  $C(0,1)$

$$\text{alors } N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{on a : } \overrightarrow{LM}\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right), \overrightarrow{LN}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

$\overrightarrow{LM} = 3\overrightarrow{LN}$  alors  $\overrightarrow{LM}$  est colinéaire à  $\overrightarrow{LN}$  alors L, M et N sont alignés.

4) \*  $M \in \Gamma$  équivaut  $\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC}\| = 2$

$$\text{équivaut } \|4\overrightarrow{ML}\| = 2$$

$$\text{équivaut } 4ML = 2$$

$$\text{équivaut } ML = \frac{1}{2}$$

$$\text{équivaut } M \in \zeta\left(L, \frac{1}{2}\right) \text{ d'où } \Gamma = \zeta\left(L, \frac{1}{2}\right)$$

\*  $M \in \Gamma'$

$$\text{équivaut } \|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC}\| \leq 2 \text{ et } \|\overrightarrow{AM}\| + \|\overrightarrow{MC}\| = 1$$

$$\text{équivaut } 4ML \leq 2 \text{ et } AM + MC = 1$$

$$\text{équivaut } ML \leq \frac{1}{2} \text{ et } AM + MC = AC$$

équivaut M appartient au disque fermé D de centre

L et de rayon  $\frac{1}{2}$  et  $M \in [AC]$

$$\text{D'où } \Gamma' = D \cap [AC]$$

$$\text{D'où } \Gamma' = [KC]$$

avec K est le point tel que  $K \in [AC]$  et  $AK = \frac{1}{4}AC$



# 11 APPLIQUER

1) E est le barycentre de (B,3) (C,2) alors

$$\overrightarrow{BE} = \frac{2}{5} \overrightarrow{BC}$$

2) \* On a  $3\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\text{Alors } 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\text{Alors } 3 \times 2\overrightarrow{IO} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\text{Alors } 3\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

Alors I est la barycentre de (O,3) et (C,1)

$$\text{alors } I \in (OC)$$

\* On a :  $3\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Alors  $3\overrightarrow{IA} + 5\overrightarrow{IE} = \vec{0}$  alors I est la barycentre de

(A,3) (E,5)

$$\text{Alors } I \in (EA)$$

alors  $I \in (OC) \cap (EA)$

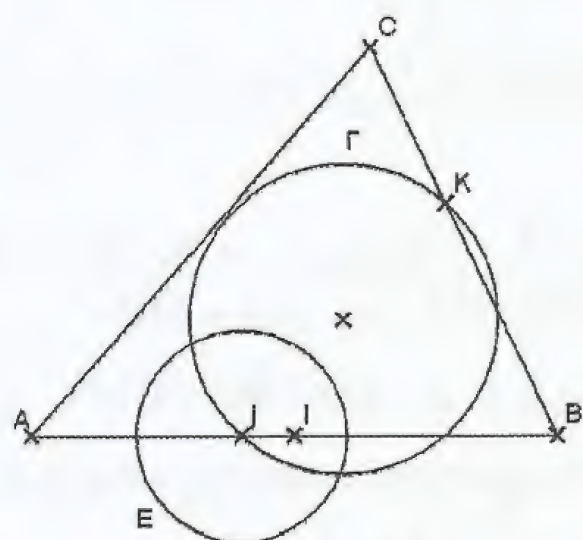
# 12 APPLIQUER

1) a) J est le barycentre des points pondérés (A,3)

(B,2) alors  $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AB}$

b) K est le barycentre des points pondérés (B,2)

et (C,3) alors  $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{5} \overrightarrow{BC}$



2) Montrons que  $\overrightarrow{IA} - 5\overrightarrow{IJ} = \vec{0}$

On a :

$$\overrightarrow{IA} - 5\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} - 5(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}) = -4\overrightarrow{IA} - 5\overrightarrow{AJ}$$

$$= -4\overrightarrow{IA} - 5 \times \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$$

$$= -4\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{AB}$$

$$= -2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BA}$$

$$= \vec{0}$$

D'où I est le barycentre des points pondérés (A,1) (J,-5)

3/ a) on a  $\|3\overrightarrow{AA} + 2\overrightarrow{AB}\| = \|2\overrightarrow{AB}\| = 2AB + 10$

$$5\|\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB}\| = 5\|2\overrightarrow{JI}\| = 10JI = 5 \text{ car } I = A * B$$

Alors  $\|3\overrightarrow{AA} + 2\overrightarrow{AB}\| = 5\|\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB}\|$  alors  $A \notin E$

$$\text{b) } M \in E \Leftrightarrow \|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = 5\|\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB}\|$$

$$\Leftrightarrow \|(3+2)\overrightarrow{MJ}\| = 5$$

car J est le barycentre des points pondérés

$$\Leftrightarrow 5MJ = 5 \quad (A,3) (B,2)$$

$$\Leftrightarrow MJ = 1$$

$$\Leftrightarrow M \in \zeta_{(J,1)}$$

Conclusion  $E = \zeta_{(J,1)}$

4)  $M \in F$

$$\Leftrightarrow \|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\|^2 + \|2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\|^2 = 25JK^2$$

$$\Leftrightarrow 5\|\overrightarrow{MJ}\|^2 + \|5\overrightarrow{MK}\|^2 = 25JK^2$$

$$\Leftrightarrow 25MJ^2 + 25MK^2 = 25JK^2$$

$$\Leftrightarrow MJ^2 + MK^2 = JK^2$$

• On a :  $JJ^2 + JK^2 = JK^2$  alors  $J \in F$

• On a :  $WJ^2 + KK^2 = JK^2$  alors  $K \in F$

• Si M appartient au plan privéete J et K on a  $MJK$  est un triangle

$$\text{On a } MJ^2 + MK^2 = JK^2$$

D'où  $MJK$  est un triangle rectangle en M.

D'où M appartient au cercle  $\zeta$  de diamètre

$[JK]$

Conclusion  $M = \zeta_{[JK]}$

# 13 APPLIQUER

$$A' = B * C, B' = A * C, C' = A * B$$

1) on a :  $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\text{Alors } 2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \vec{0} \text{ car } A' = B * C$$

$$\text{Alors } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA'} = \vec{0}$$

$$\text{Alors } G = A * A'$$





$$2) \text{ on : } 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\text{Alors } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\text{Alors } 2\overrightarrow{GC'} + 2\overrightarrow{GB'} = \vec{0}$$

$$\text{Alors } \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GB'} = \vec{0}$$

$$\text{Alors } G = C' * B'$$

$$3) \text{ on a : } 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\text{Alors } (2+1)\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ car M est le}$$

barycentre des points pondérés  $(A,2)(B,1)$

$$\text{Alors } 3\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

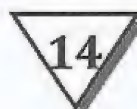
Alors G est le barycentre des points  $(M,3)(C,1)$

$$3) * \text{ on a } G = A * A' \text{ alors } G \in (AA')$$

$$\bullet \text{ On } G = B' * C' \text{ alors } G \in (B'C')$$

$$\bullet \text{ On a G est le barycentre des points pondérés } (M,3) \text{ et } (C,1) \text{ Alors } G \in (MC)$$

D'où les droites  $(AA')$ ,  $(B'C')$  et  $(MC)$  sont concourantes en G.

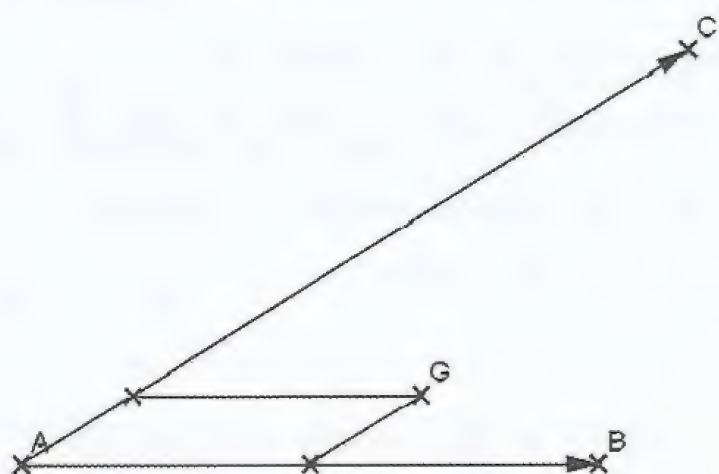


#### 14 APPLIQUER

G est le barycentre des points pondérés  $(A,2), (B,3)$  et  $(C,1)$

Alors

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2+3+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2+3+1}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$$



#### 2ème méthode :

\*G est le barycentre de  $(A,2)(C,1)$

On a G est le barycentre de  $(A,2), (C,1), (B,3)$

Alors G est le barycentre  $(G',3), (B,3)$  avec  $G'$  est le barycentre de  $(A,2)(C,1)$

$$\text{Alors } G = G' * B$$

Construire : On construit  $G'$  le barycentre  $(A,2)(C,1)$  de puis le point G.



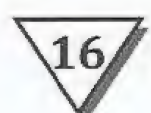
#### 15 S'ENTRAINER

$$1) 2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} - 5\overrightarrow{KC} = (2+3)\overrightarrow{KG} - 5\overrightarrow{KC} = 5(\overrightarrow{KG} - \overrightarrow{KC}) = 5(\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KG}) = 5\overrightarrow{CG}$$

Avec G est le barycentre des points pondérés  $(A,2), (B,3)$ .

$$2/ 2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} + 4\overrightarrow{KC} = (2+3+4)\overrightarrow{KG'} \text{ avec } G' \text{ est le barycentre des points pondérés } (A,2)(B,3)(C,4)$$

$$3/ 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC} = (2+3+5)\overrightarrow{MG''} = 4\overrightarrow{MG''} \text{ avec } G'' \text{ est le barycentre } (A,2), (B,-3).$$

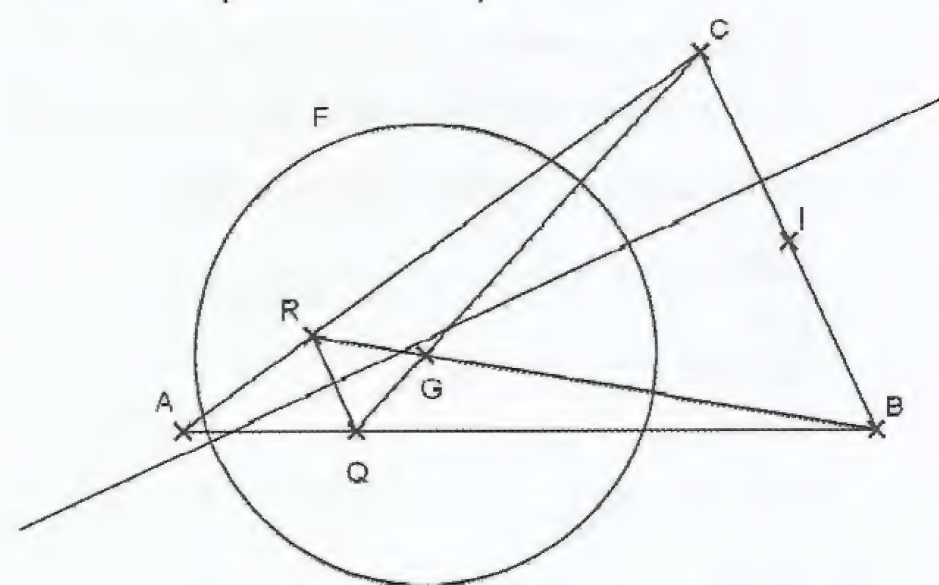


#### 16 S'ENTRAINER

R est le barycentre de  $(A,3)$  et  $(C,1)$

Q est le barycentre  $(A,3)(B,1)$

$$1) a) \overrightarrow{AR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$



$$b) * \text{ On a } 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\text{alors } (3+1)\overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\text{alors } 4\overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$



alors G est le barycentre des points pondérés  $(Q, 4)(C, 1)$

alors  $G \in (QC)$

\* On a  $3\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

Alors  $3\vec{GA} + \vec{GC} + \vec{GB} = \vec{0}$

Alors  $(3+1)\vec{GR} + \vec{GB} = \vec{0}$

Alors  $4\vec{GR} + \vec{GB} = \vec{0}$

Alors G est le barycentre de  $(R, 4)(B, 1)$

Alors  $G \in (BR)$

On a :  $(BR)$  et  $(CQ)$  ne sont pas confondues  
d'où  $(QC)$  et  $(BR)$  sont sécantes en G.

2/ On a :  $3\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

Alors  $3\vec{GA} + 2\vec{GI} = \vec{0}$  car  $I = B * C$

Alors G est le barycentre des points pondérés  $(A, 3)(I, 2)$

Alors G, A et I sont alignés.

3/\*  $M \in E$  équivaut  $\|3\vec{MA} + \vec{MC}\| = \|3\vec{MA} + \vec{MB}\|$

Equivaut  $\|(3+1)\vec{MR}\| = \|(3+1)\vec{MQ}\|$

Equivaut  $4MR = 4MQ$

Equivaut  $MR = MQ$

Equivaut M appartient à la droite  $\Delta$

Avec  $\Delta$  est la médiatrice de  $[RQ]$

\* Soit G le barycentre

des points pondérés  $(A, 3), (B, 1)$  et  $(C, 1)$

$M \in F$  équivaut  $\|3\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|2\vec{MB} - 2\vec{MC}\|$

équivaut  $\|(3+1+1)\vec{MG}\| = \|2(\vec{CM} + \vec{MB})\|$

$5MG = 2CB$

$5MG = 10$

$MG = 2$

$M \in \mathcal{C}_{(G, 2)}$

D'où  $F = \mathcal{C}_{(G, 2)}$

## 17 SE PERFECTIONNER

G barycentre  $(A, m^2 - 2)(B, 3m - 2)$

1)

a) G existe si  $\alpha + \beta \neq 0$  si  $(m^2 + 2) + (3m - 2) \neq 0$

donc si  $m^2 + 3m - 4 \neq 0$

$a = 1$   $b = 3$  et  $c = -4$

$a + b = c = 1 + 3 - 4 = 0$  donc  $m' = 1$  et  $m'' = -4$

pour que G existe il faut que  $m \neq 1$  et  $m \neq -4$

alors  $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, -4\}$

b)  $G \in [A, B)$  eq  $x_G \geq 0$  équivaut  $\frac{\beta}{\alpha + \beta} \geq 0$

équivaut  $\frac{3m - 2}{m^2 + 3m - 4} \geq 0$

\*  $3m - 2 = 0$  eq  $m = \frac{2}{3}$

$x$	$-\infty$	$-4$	$\frac{2}{3}$	$1$	$+\infty$
$3m-2$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$
$m^2+3m-4$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$
$\frac{3m-2}{m^2+3m-4}$	$-$	$  $	$+$	$0$	$-$
					$  $
					$+$

$m \in \left]-4, \frac{2}{3}\right] \cup ]1, +\infty[$

donc G barycentre  $(A, 2)(B, 4)$

2)

a)  $\vec{AC} = \frac{4}{6}\vec{AB} = \frac{2}{3}\vec{AB}$

b) K la barycentre de  $(A, 1), (B, 2)$  et  $(C, 3)$ .

Montrons que  $K = G * C$  ?

équivaut K le barycentre de  $(G, 3)$  et  $(C, 3)$

car G est barycentre  $(A, 2)(B, 4)$

équivaut  $K = G * C$

3)

a) \*

$C_1 = \{M \in P / \|\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC}\| = 3\|2\vec{MK} - 2\vec{MB}\|\}$

sig  $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC}\| = 3\|2\vec{MK} - 2\vec{MB}\|$

sig  $\|6\vec{MK}\| = 3\|2\vec{BK}\|$

sig  $6MK = 6BK$

sig  $MK = BK$  d'où  $M \in C_{(K, BK)}$

\*  $C_2 = \{M \in P / \|\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC}\| = 3\|\vec{MC} - \vec{MG}\|\}$



$$\text{sig } \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\| = 3\|\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MG}\|$$

$$\text{sig } \|\overrightarrow{6MK}\| = 3\|\overrightarrow{GC}\|$$

$$\text{sig } 6MK = 6GK$$

$$\text{sig } MK = GK \text{ d'où } M \in C'_{(K,GK)}$$

b)

$$T = \{M \in P / 3\|\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MG}\| \leq \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\| \leq 3\|\overrightarrow{2MK} - \overrightarrow{2MB}\|\}$$

$$\text{sig } 3\|\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MG}\| \leq \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\| \leq 3\|\overrightarrow{2MK} - \overrightarrow{2MB}\|$$

$$\text{sig } 3\|\overrightarrow{GC}\| \leq \|\overrightarrow{6MK}\| \leq 3\|\overrightarrow{2BK}\|$$

$$\text{sig } 6GK \leq 6MK \leq 6BK$$

$$\text{sig } GK \leq MK \leq BK$$

donc : M appartient à la couronne limitée par

$$C_{(K,BK)} \text{ et } C'_{(K,GK)}.$$

## 18 SE PERFECTIONNER

$$1) \text{ a) } \alpha \overrightarrow{BK} + \beta \overrightarrow{BC} = \vec{0} ?$$

$$\text{On a } \overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{BK} \text{ alors } 3\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

Alors B est le barycentre des points pondérés  $(K,3)(C,1)$

$$b) \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0} ?$$

$$\text{on a : } \overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GA} \text{ alors } 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

alors G est le barycentre des points pondérés  $(A,2)(B,1)$

$$c) \text{ on a } 8\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GK} + \overrightarrow{GC} = 8\overrightarrow{GA} + (3+1)\overrightarrow{GB} \text{ (car B est le barycentre de } (K,3)(C,1) \text{ )}$$

$$= 8\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB}$$

$$= 8(2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB})$$

$$= \vec{0} \text{ car G est le barycentre des points pondérés } (A,2)(B,1)$$

D'où G est le barycentre des points pondérés  $(A,8)(K,3)(C,1)$

$$2) \text{ Soit I le barycentre de } (A,8)(K,3)$$

$$a) \text{ On a : } 8\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GK} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\text{Alors } (8+3)\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\text{Alors } 11\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Alors G est le barycentre des points pondérés  $(I,11)(C,1)$  Alors G, I et C sont alignés.

b) \*on a G, I et C sont alignés alors  $I \in (GC)$

\*on a I est le barycentre des points pondérés  $(A,8)(K,3)$  Alors  $I \in (AK)$

(AK) et (GC) ne sont pas sécants alors  $\{I\} = (GC) \cap (AK)$

$$3) a) M \in E$$

$$\text{équivalent } \|\overrightarrow{8MA} + 3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{12MA} - \overrightarrow{12MG}\|$$

$$\text{Equivalent } \|(8+3+1)\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{12(GM + MA)}\|$$

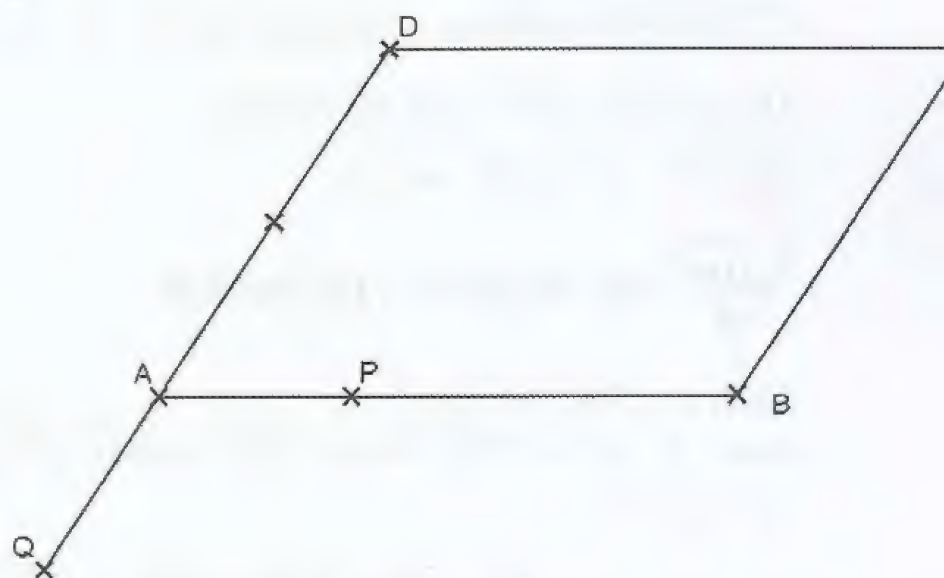
$$\text{Equivalent } 12MG = 12GA$$

$$\text{Equivalent } MG = GA$$

$$\text{Equivalent } M \in \mathcal{C}_{(G,GA)}$$

## 19 SE PERFECTIONNER

1)



$$2) \text{ montrons que } 2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$$

$$\text{On a : } \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \text{ alors } 3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} \text{ alors}$$

$$3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} \text{ alors } 2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$$

Alors P est le barycentre des points pondérés  $(A,2)(B,1)$

$$b) a\overrightarrow{QA} + b\overrightarrow{QD} = \vec{0} ?$$

on a :

$$2\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AD} = \vec{0} \text{ alors } -2\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QD} = \vec{0}$$

$$\text{alors } -3\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QD} = \vec{0}$$

alors Q est le barycentre des points pondérés  $(A,-3)(Q,1)$

3) a) on a :



$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD} \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

Alors C est le barycentre des points pondérés (A,1), (B,-1) et (D,-1)

b) \*  $2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = (2+1)\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{CP}$  Car P est le barycentre des points pondérés (A,2)(B,1)

\*  $3\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CD} = (3+(-1))\overrightarrow{CQ} = 2\overrightarrow{CQ}$  C (car Q est le barycentre de (A,-3)(Q,1) donc Q est aussi le barycentre de (A,3),(Q,-1))

c) On a :  $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \vec{0}$

alors  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$

$$\begin{aligned}\text{On a : } 2\overrightarrow{CQ} &= 3\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{CA} - (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) \\ &= 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \\ &= 3\overrightarrow{CP}\end{aligned}$$

$$\text{Alors } \overrightarrow{CQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CP}$$

Alors  $\overrightarrow{CQ}$  et  $\overrightarrow{CP}$  sont colinéaires

Alors C, P et Q alignés.

## 20 SE PERFECTIONNER

$$1) \text{ On a : } 2\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GI} = \vec{0}$$

Alors G est le barycentre des points pondérés (C,2)(I,1)

$$2) \text{ on a : } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI} + 4\overrightarrow{GC} \text{ car } I = A * B$$

$$= 2(\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GC})$$

$$= 2 \times \vec{0}$$

car G est le barycentre de (C,2)(I,1)

$$= \vec{0}$$

Alors G est le barycentre des points pondérés (A,1)(B,1)(C,4)

$$3) a) \alpha \overrightarrow{AI} + \beta \overrightarrow{AB} = \vec{0} ?$$

$$\text{On a : } I = A * B \text{ alors } \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ alors } 2\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

Alors A est le barycentre des points pondérés (I,2)(B,-1)

$$b) * M \in E$$

$$\text{équivalent } \|2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MI}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

$$\text{équivalent } \|(2+1)\overrightarrow{MG}\| = \|(1+1+1)\overrightarrow{MG'}\| \text{ Avec } G'$$

est le centre de gravité de ABC.

$$\text{Équivaut } 3\overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{MG'}$$

$$\text{Équivaut } \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MG'}$$

Équivaut M appartient à la droite  $\Delta$  la médiatrice de [GG']

D'où  $E = \Delta$

\* M appartient à F

$$\text{équivalent } \|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = 2\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| \text{ et } \|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MI}\| \neq 0$$

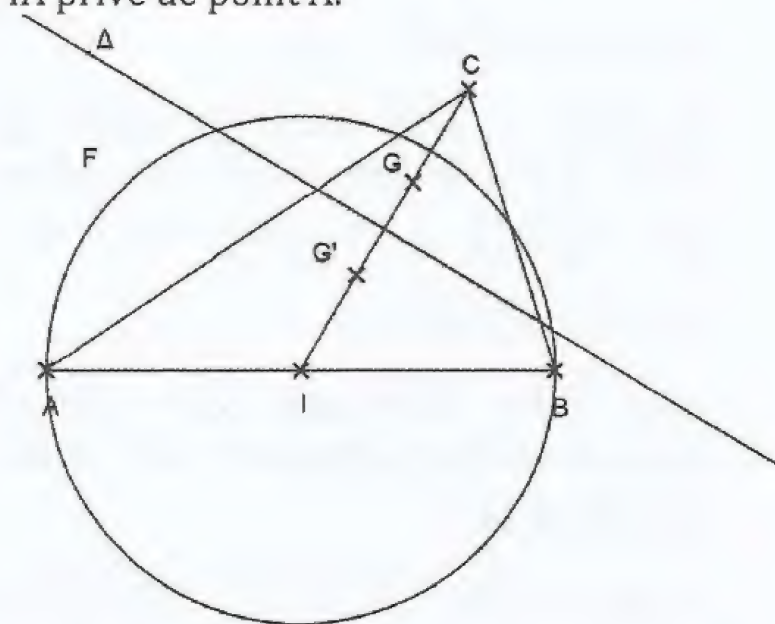
$$\text{Équivaut } 2\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 2\|\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}\| \text{ et } \|2\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MB}\| \neq 0$$

$$\text{Équivaut } \|2\overrightarrow{MI}\| = \|\overrightarrow{BA}\| \text{ et } \|(2-1)\overrightarrow{MA}\| \neq 0$$

$$\text{Équivaut } 2MI = BA \text{ et } MA \neq 0$$

$$\text{Équivaut } MI = IA \text{ et } M \neq A$$

Équivaut M appartient au cercle  $\zeta$  d centre I et de rayon IA privé de point A.



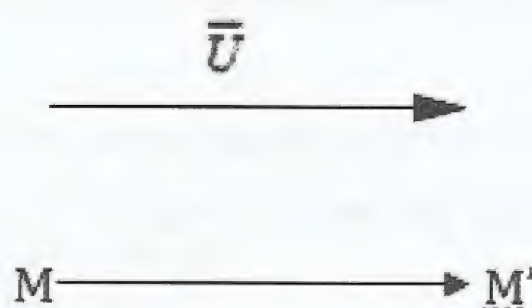


## Translation

### I) Résumé de cours

#### A) Définition :

$f: P \longrightarrow P$  est une translation signifie il existe un vecteur constant  $\vec{U}$  tel que pour tout point M de P on a  $f(M) = M'$  signifie  $\overrightarrow{MM'} = \vec{U}$



On a  $t_{\vec{U}}(M) = M'$  signifie  $\overrightarrow{MM'} = \vec{U}$

#### B) Propriété caractéristique :

Soit f une application du plan dans le plan et M et N deux points quelconques du plan d'images respectives M' et N'

f est une translation équivaut à  $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

#### C) Propriétés :

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad t_{\vec{U}}(A) = A' \\ \quad \quad t_{\vec{U}}(B) = B' \end{array} \right\} \text{ alors } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \text{ d'où } AB = A'B' \text{ et } (AB) // (A'B')$$

2)

Une translation conserve	{	Les distances	L'alignement
		Le parallélisme	L'orthogonalité
		Le milieu	Le barycentre
		Les angles	Le contact

- L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle
- L'image d'un segment par une translation est un segment qui lui est parallèle et isométrique.
- L'image d'une demi-droite par une translation est une demi-droite.
- L'image d'un cercle C de centre O et de rayon r par une translation est un cercle C' de centre  $O' = t(O)$  et de même rayon r.
- L'image d'un polygone par une translation est un polygone qui lui est superposable





### D) Problème de recherche d'ensembles de points faisant intervenir une translation :

#### Question :

Lorsque le point M varie sur l'ensemble  $\Delta$  déterminer l'ensemble des points N ?

#### Méthode :

On cherche un vecteur constant  $\vec{U}$  tel que  $\vec{MN} = \vec{U}$

Dans ce cas on a  $t_{\vec{U}}(M) = N$  or M varie sur l'ensemble  $\Delta$  alors  $t_{\vec{U}}(M)$  varie sur  $t_{\vec{U}}(\Delta)$  alors N varie sur  $t_{\vec{U}}(\Delta)$

### E) Problèmes de construction faisant intervenir une translation :

#### Question :

$\Delta$  et  $\Delta'$  deux droites sécantes, A et B deux points distincts n'appartenant ni à  $\Delta$  ni à  $\Delta'$   
Construire les points M de  $\Delta$  et N de  $\Delta'$  tel que ABMN soit un parallélogramme.

#### Méthode :

1<sup>ère</sup> Etape: Analyse de la figure :

- On cherche un vecteur  $\vec{U}$  des données tel que  $\vec{MN} = \vec{U}$  Dans notre cas on  $\vec{MN} = \vec{BA}$  d'où  $t_{\vec{BA}}(M) = N$
- On a  $M \in \Delta$  alors  $t_{\vec{BA}}(M) \in t_{\vec{BA}}(\Delta)$  alors  $N \in t_{\vec{BA}}(\Delta)$  or  $N \in \Delta'$  d'où  $N \in \Delta' \cap t_{\vec{BA}}(\Delta)$

2<sup>ème</sup> Etape: Discussion de l'existence de la solution :

- On discute l'existence de N qui dépend de la position relative de  $\Delta'$  et  $t_{\vec{BA}}(\Delta)$

3<sup>ème</sup> Etape: On explique les étapes de la construction qui sont dans notre cas :

- On construit  $t_{\vec{BA}}(\Delta)$
- On marque le point  $N \in \Delta' \cap t_{\vec{BA}}(\Delta)$
- On construit le point M tel que  $\vec{MN} = \vec{BA}$

### II) Exercices :



#### 1 APPLIQUER

A et C sont deux points distincts du plan. On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M associé le point M' tel que  $\vec{AM'} = 2\vec{AM} + \vec{MC}$   
Montrer que f est une translation que l'on caractérisera.



#### 2 APPLIQUER

Soient un triangle ABC et G le barycentre des points pondérés (A,2) (C,3) et f l'application de P vers P tel que:  $f(M) = M'$  signifie  $\vec{MM'} = 2\vec{MA} - 5\vec{MB} + 3\vec{MC}$





Montrer que  $f$  est une translation que l'on caractérisera.

**3 APPLIQUER**

Soit  $ABF$  un triangle On pose  $C = t_{\overline{AB}}(B)$  et  $F = t_{\overline{AB}}(E)$ .

- 1) Construire  $C$  et  $E$ .
- 2) Montrer que  $t_{\overline{BE}}(C) = F$
- 3) Déterminer  $t_{\overline{AB}}((EF))$
- 4) Construire  $t_{\overline{AB}}((EA))$

**4 APPLIQUER**

Soit  $ABCD$  un trapèze du grand base  $[AB]$  tel que  $AD = 4$  cm

Soit  $C$  le cercle de centre  $A$  et de rayon  $r = 3$  cm

- 1) Déterminer l'image de  $(AB)$  par  $t_{\overline{AD}}$ .
- 2) Construire  $C'$  l'image de  $C$  par  $t_{\overline{AD}}$ .
- 3) On désigne par  $E$  l'un des points d'intersections de  $C$  et  $C'$  et par  $\Delta$  la droite passant par  $E$  et parallèle à  $(AD)$ .  $\Delta$  recoupe  $C$  en  $I$  et  $C'$  en  $J$ .
  - a) Déterminer  $t_{\overline{AD}}(\Delta)$
  - b) Montrer que  $t_{\overline{AD}}(E) = J$  et  $t_{\overline{AD}}(I) = E$ .
  - c) En déduire que  $E = I * J$

**5 S'ENTRAÎNER**

Soit  $C$  un cercle de centre  $O$  de diamètre  $[CD]$  et soit  $A$  un point de  $C$  distinct de  $C$  et  $D$ .

Soit l'application  $f: P \longrightarrow P$  tel que  $f(M) = M'$  signifie  $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CM'} = \vec{0}$

- 1) Montrer que  $f$  est la translation de vecteur  $\overrightarrow{CA}$ .
- 2) Construire  $C'$  l'image de  $C$  par la translation de vecteur  $\overrightarrow{CA}$ . (On pose  $O'$  le centre de  $C'$ )
- 3) La droite  $(AC)$  rencontre  $C'$  en  $B$ .  
La droite  $\Delta$  passant par  $B$  et perpendiculaire à  $(AC)$  rencontre  $C'$  en  $F$ 
  - a) Montrer que  $t_{\overline{CA}}(A) = B$  et que  $t_{\overline{CA}}((AD)) = (BF)$
  - b) En déduire que  $t_{\overline{CA}}(D) = F$
  - c) Montrer que  $t_{\overline{CD}}(A) = F$



- 4) Soit T le point défini par  $3\overrightarrow{TA} - \overrightarrow{TF} = \vec{0}$  Placer le point T. Déterminer l'ensemble des points T lorsque D et C sont fixes et A varie sur le cercle C

## 6 S'ENTRAINER

Soit ABC un triangle rectangle en A.

I, J, K sont les milieux respectifs des segments  $[AC]$ ,  $[BC]$  et  $[AB]$ .

Soit  $(\zeta)$  le cercle de diamètre  $[CI]$  et  $(\zeta')$  le cercle de diamètre  $[AI]$ .

- 1) Démontrer que l'image du cercle  $(\zeta)$  par  $t_{\overline{CI}}$  est le cercle  $(\zeta')$
- 2) Déterminer l'image de la droite  $(BC)$  par  $t_{\overline{CI}}$
- 3) Le cercle  $(\zeta)$  recoupe  $(BC)$  en M et le cercle  $(\zeta')$  recoupe  $(IK)$  en  $M'$

Démontrer que  $M' = t_{\overline{CI}}(M)$

- 4) Soit  $B' = t_{\overline{CI}}(B)$

- a) Construire le point  $B'$
- b) Démontrer que K est le milieu de  $[IB']$

- 5) On suppose que B et C sont fixes et A variable

Déterminer et construire l'ensemble des points D tel que ABCD soit un parallélogramme.

## 7 S'ENTRAINER

On donne dans le plan un triangle ABC rectangle en A et on désigne par O le milieu de  $[BC]$

- 1) Construire le point E barycentre des points pondérés  $(B, 3)$  et  $(C, 1)$ .

- 2) Soit F le barycentre des points pondérés  $(A, 1)$ ,  $(E, 2)$  et  $(B, -2)$ .

Montrer que  $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ .

- 3) On considère l'application :  $f: P \rightarrow P$

$M \rightarrow M'$  tels que  $2\overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

Montrer que f est la translation de vecteur  $\overrightarrow{BO}$

- 4) Soit  $\zeta$  le cercle de diamètre  $[BC]$  et soit  $\zeta'$  le cercle de centre C et de rayon CO.

La droite  $(BC)$  recoupe  $\zeta'$  en  $C'$

- a) Déterminer  $f(\zeta)$  et  $f((BC))$  en déduire  $f(C)$





- b) Trouver  $f(A)$
- c) On suppose que les points B et C sont fixes et que A varie. Sur quelle ligne fixe se déplace le point F.
- d) Soit  $E' = f(E)$  ; exprimer  $E'$  comme barycentre de O et C'

8

### S'ENTRAINER

On considère un triangle ABC isocèle en C et le point I milieu de  $[AC]$

- 1) Construire le point E barycentre de  $(A, 3)$  et  $(C, -1)$
- 2) Soit G le barycentre de  $(A, 3)$ ,  $(B, 1)$  et  $(C, -1)$ 
  - a) Montrons que  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$
  - b) Prouver que G, B et E sont alignés.
  - c) En déduire une construction simple du point G.
- 3) On suppose dans cette question que les points B et C sont fixes de sorte que le triangle ABC reste isocèle en C. quel est le lieu des points G ?
- 4) Soit :  $f : P \rightarrow P$   
 $M \rightarrow M'$  tel que  $2\overrightarrow{ME'} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{CA}$ 
  - a) Montrer que f est une translation de vecteur  $\overrightarrow{AC}$
  - b) Construire les points  $B' = f(B)$  et  $C' = f(C)$
  - c) montrer que  $f(E) = I$
- 5) a) Trouver les images des droites  $(AG)$  et  $(EG)$  par f.
  - b) Les droites  $(B'I)$  et  $(BC)$  se coupent en  $G'$ . Montrer que  $G'$  est le barycentre de  $(C', -1)$ ,  $(C, 3)$  et  $(B', 1)$

9

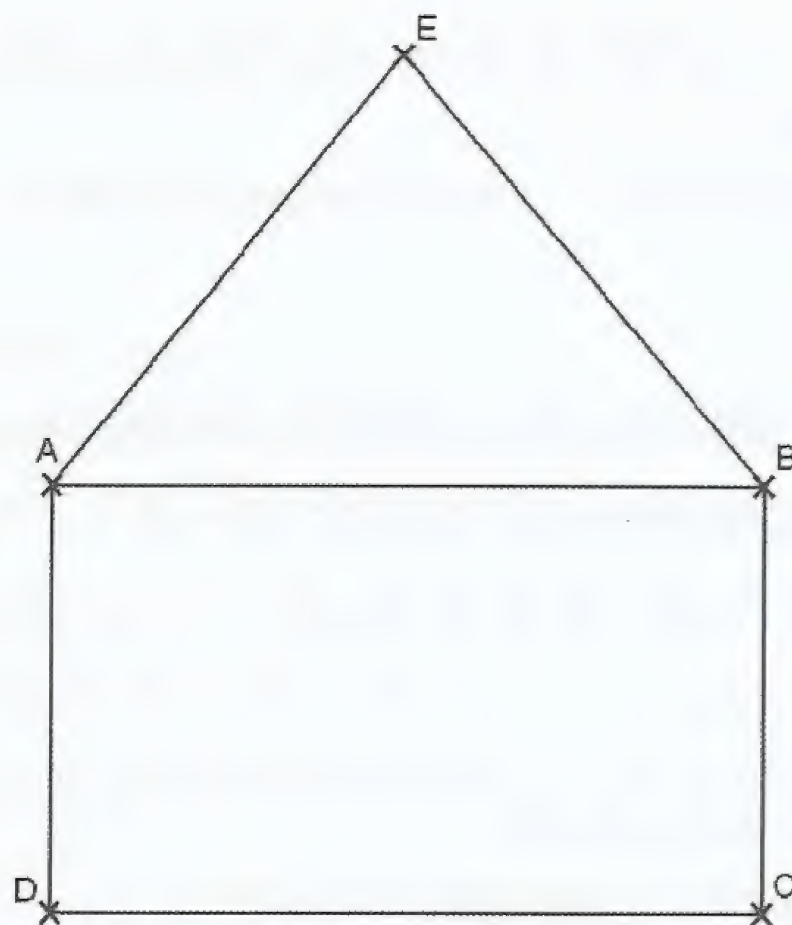
### S'ENTRAINER

On considère un rectangle ABCD et un point E n'appartient à (AB)

On désigne par C', D' et E' les projetés orthogonaux respectifs de C, D et E sur les droites (AE), (BE) et (AB). (Voir figure au dessous)

- 1) Déterminer l'image de  $(EE')$  par  $t_{\overrightarrow{AD}}$
- 2) Soit  $T_1$  la hauteur issue de B dans le triangle ABE et  $T_2$  la hauteur issue de A dans le triangle ABE. Déterminer les images de  $T_1$  et  $T_2$  par  $t_{\overrightarrow{AD}}$
- 3) Montrer que  $(CC')$ ,  $(DD')$  et  $(EE')$  sont concourantes.



**10****S'ENTRAINER**

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que A et B sont fixe et C variable

Soit M un point du plan tel que ABCM soit un parallélogramme

Déterminer et construire l'ensemble E des points M

**11****SE PERFECTIONNER**

Soit un cercle C de centre O et de rayon r, A est un point fixe de C et M un point variable de C distinct de A. On désigne par E le milieu de [AM] et F le symétrique de E par rapport au milieu I de [OM].

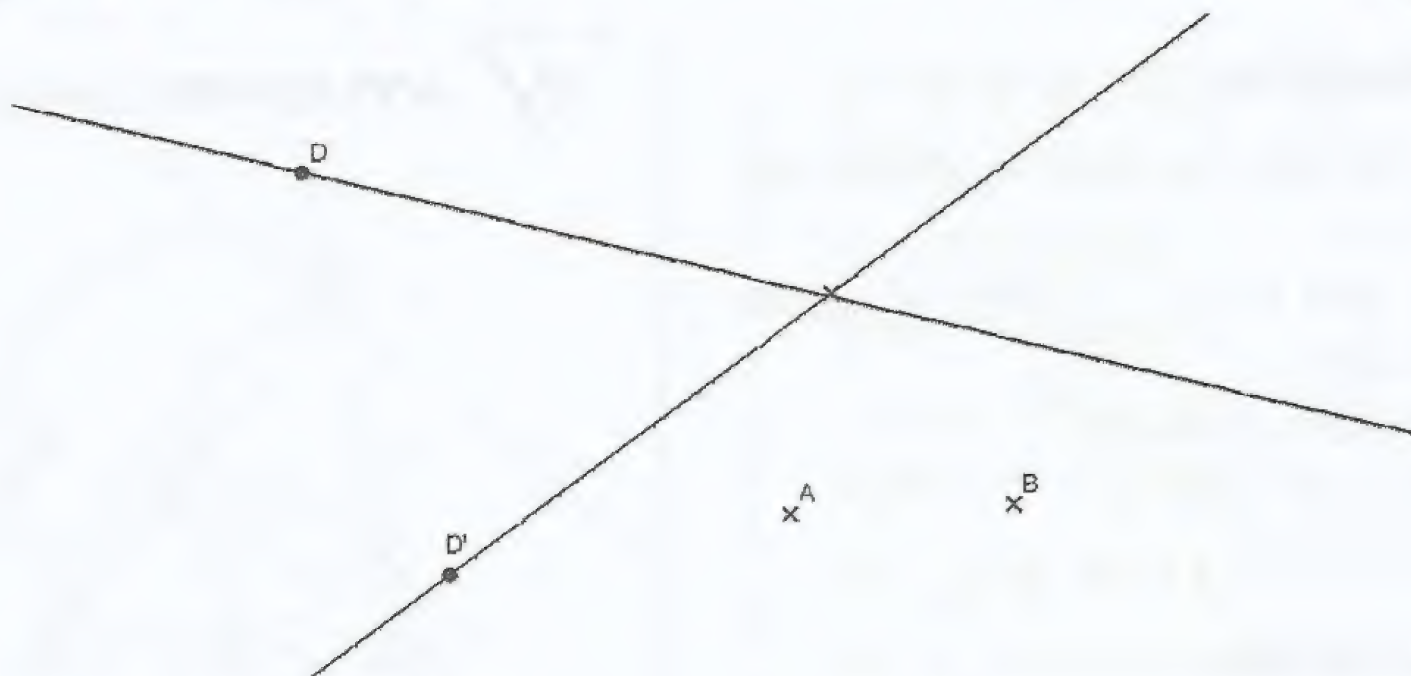
- 1) Sur quelle ligne fixe varie la point E lorsque M varie ?
- 2) Montrer que  $t_{AO}(E) = F$
- 3) En déduire l'ensemble des points F lorsque M varie.

**12****SE PERFECTIONNER**

Dans le plan on donne deux droites D et D' sécantes en O et deux points A et B comme indique la figure ci-dessous.

Construire deux points M et M' appartenant respectivement à D et D' tels que  $\overline{MM'} = \overline{AB}$ .



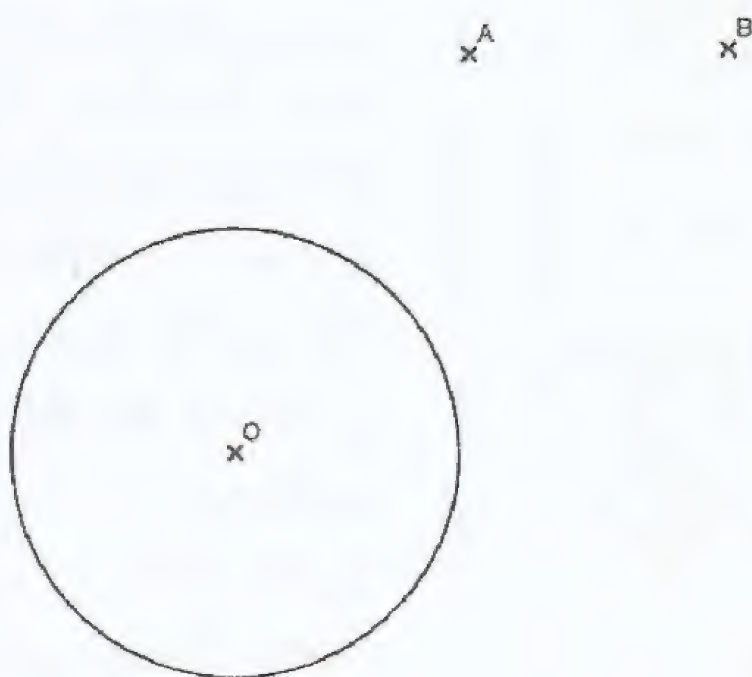


13

**SE PERFECTIONNER**

Soit un cercle  $C$  et  $A$  et  $B$  deux points distincts et extérieurs à  $C$ .

Construire deux points  $M$  et  $N$  du cercle  $C$  tel que  $ABNM$  soit un parallélogramme





### 1 APPLIQUER

Montrons que pour tout  $M \in P$ ,  $f(M) = M'$  signifie  $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$  ?

On a pour tout  $M \in P$ ,  $f(M) = M'$  signifie

$$\overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}$$

$$\text{Signifie } \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}$$

$$\text{Signifie } \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}$$

$$\text{Signifie } \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AC} \text{ D'où } f = t_{\overrightarrow{AC}}$$

### 2 APPLIQUER

G est le barycentre  $(A, 2)(C, 3)$

Montrons que pour tout  $M \in P$ ,  $f(M) = M'$  signifie  $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

On a  $f(M) = M'$  signifie  $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$

$$\text{signifie } \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC} - 5\overrightarrow{MB}$$

$$= (2+3)\overrightarrow{MG} - 5\overrightarrow{MB} \text{ car G est le barycentre } (A, 2)(C, 3)$$

$$= 5(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{BM}) = 5(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MG}) = 5\overrightarrow{BG}$$

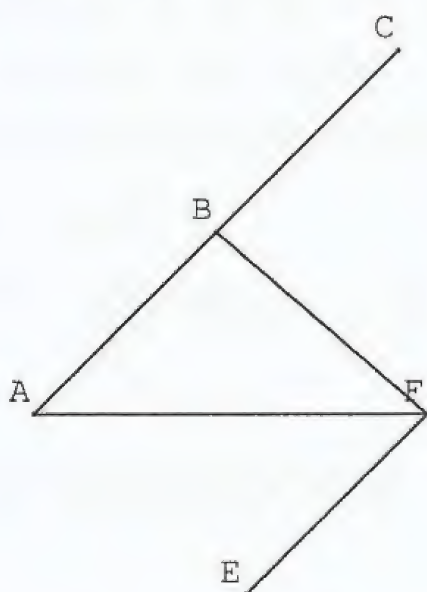
$$\text{D'où } f = t_{5\overrightarrow{BG}}$$

### 3 APPLIQUER

Soit ABF un triangle,  $C = t_{\overrightarrow{AB}}(B)$  et  $F = t_{\overrightarrow{AB}}(E)$ .

$$1) t_{\overrightarrow{AB}}(B) = C \text{ signifie } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$$

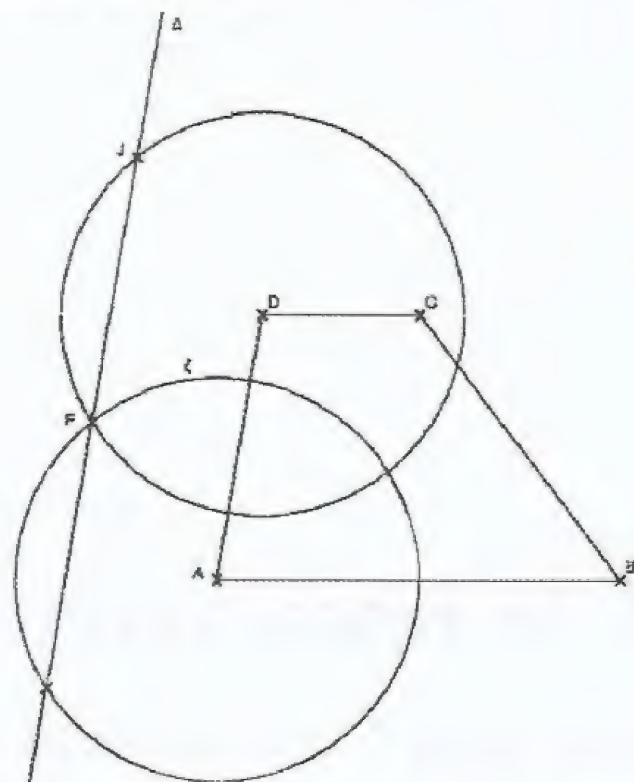
$$t_{\overrightarrow{AB}}(E) = F \text{ signifie } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$$



2) Il suffit de montrer que  $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF}$

On a  $t_{\overrightarrow{AB}}(B) = C$  } alors  $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF}$  d'où  $t_{\overrightarrow{BE}}(C) = F$   
 $t_{\overrightarrow{AB}}(E) = F$  }

### 4 APPLIQUER



1) L'image de (AB) par  $t_{\overrightarrow{AD}}$  est la droite passant par  $t_{\overrightarrow{AD}}(A) = D$  et parallèle à (AB) alors  $t_{\overrightarrow{AD}}((AB)) = (DC)$

3) a)  $t_{\overrightarrow{AD}}(\Delta) = \Delta$  car  $(AD) // \Delta$

b) on a  $E \in \Delta \cap \zeta$

alors  $t_{\overrightarrow{AD}}(E) \in t_{\overrightarrow{AD}}(\Delta) \cap t_{\overrightarrow{AD}}(\zeta)$ ,

$$\in \Delta \cap \zeta' ; \in \{E, J\}$$

alors  $t_{\overrightarrow{AD}}(E) = E$  ou  $t_{\overrightarrow{AD}}(E) = J$

$t_{\overrightarrow{AD}}(E) = E$  est impossible car  $\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{EE}$  d'où

$$t_{\overrightarrow{AD}}(E) = J$$

$$* t_{\overrightarrow{AD}}(I) = E ?$$

$I \in \Delta \cap \zeta$  alors  $t_{\overrightarrow{AD}}(I) \in t_{\overrightarrow{AD}}(\Delta) \cap t_{\overrightarrow{AD}}(\zeta)$

alors  $t_{\overrightarrow{AD}}(I) \in \Delta \cap \zeta'$

alors  $t_{\overrightarrow{AD}}(I) \in \{E, J\}$

On a  $t_{\overrightarrow{AD}}(I) \neq J$  car  $t_{\overrightarrow{AD}}(E) = J$

D'où  $t_{\overrightarrow{AD}}(I) = E$ .

c) On a  $t_{\overrightarrow{AD}}(E) = J$  alors  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EJ}$

$$\text{On a } t_{\overrightarrow{AD}}(I) = E \text{ alors } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IE}$$

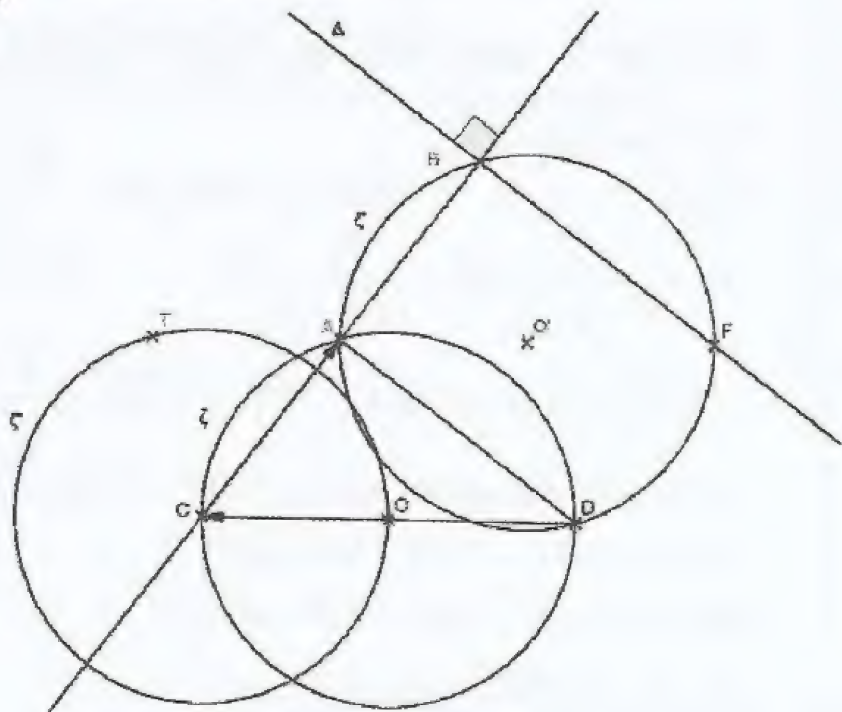
$$\text{D'où } \overrightarrow{IE} = \overrightarrow{EJ}$$

$$\text{Alors } E = I * J$$



5

## S'ENTRAINER



$$f(M) = M' \text{ équivaut } 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CM'} = \vec{0}$$

1/Montrons que  $f(M) = M'$  signifie  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{CA}$  ?

On a :  $f(M) = M'$  équivaut  $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CM'} = \vec{0}$

Signifie  $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{CM'} = \vec{0}$

Signifie  $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{CM'} + \overrightarrow{M'A} = \vec{0}$

Signifie  $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

Signifie  $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

Signifie  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{CA}$

D'où  $f = t_{\overline{CA}}$

3) a) \* montrons que  $t_{\overline{CA}}(A) = B$  ?

On a  $A \in (AC) \cap \zeta \Rightarrow$

$$t_{\overline{CA}}(A) \in t_{\overline{CA}}((AC)) \cap t_{\overline{CA}}(\zeta)$$

$$\in (AC) \cap \zeta'$$

$$\in \{A, B\}$$

Alors  $t_{\overline{CA}}(A) = A$  ou  $t_{\overline{CA}}(A) = B$

$t_{\overrightarrow{CA}}(A) = A$  est impossible car  $\overrightarrow{CA} \neq \overrightarrow{AA}$

D'où  $t_{\overline{CA}}(A) = B$

\*Montrons que  $t_{\overline{CA}}\left(\left(\overline{AD}\right)\right)=(BF)$ ?

On a ACD triangle inscrit dans le cercle  $\zeta$  de diamètre  $[CD]$  alors ACD triangle en A d'où  $(AD) \perp (AC)$  .

or  $(BF) \perp (AC)$  alors  $(BF) // (AD)$

On : l'image de  $(AD)$  par  $t_{\overline{CA}}$  est la droite passant par  $t_{\overline{CA}}(A) = B$  et parallèle à  $(AD)$  donc  $t_{\overline{CA}}((AD)) = (BF)$

b) on a  $D \in (AD) \cap \zeta$

$$\text{alors } t_{\overline{CA}}(D) \in t_{\overline{CA}}((AD)) \cap t_{\overline{CA}}(\zeta) \\ \in (BF) \cap \zeta', \in \{B, F\}$$

D'où  $t_{\overline{CA}}(D) = B$  ou  $t_{\overline{CA}}(D) = F$

On a :  $t_{\overrightarrow{CA}}(D) = B$  est impossible car  $\overrightarrow{CA} \neq \overrightarrow{DB}$

D'où  $t_{\overline{CA}}(D) = F$

c)  $t_{\overline{CD}}(A) = F$  ? on a  $t_{\overline{CA}}(D) = F$

Alors  $t_{\overline{CA}}(D) = F$

Alors  $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DF}$  Alors  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF}$

$$\text{d'où } t_{\overline{CD}}(A) = F$$

4) On :  $3\overrightarrow{TA} - \overrightarrow{TF} = \vec{0}$  alors T est le barycentre des points pondéré (A,3) (F,-1)

Alors  $\overrightarrow{AT} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$

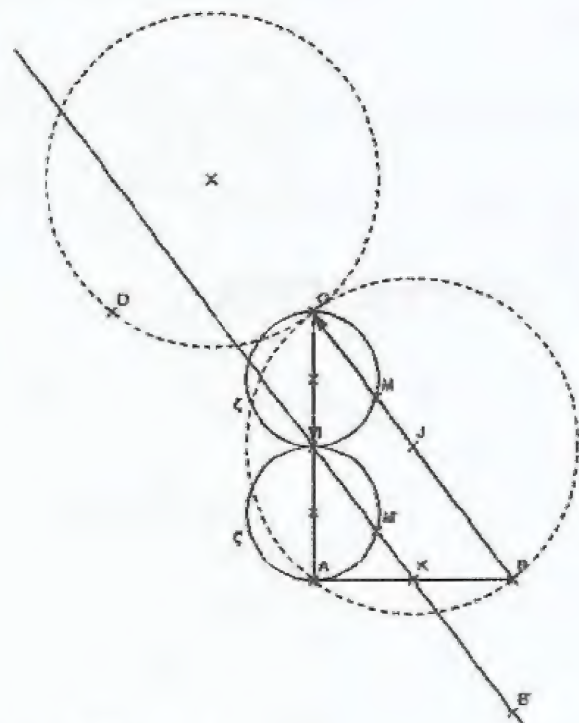
5) On a  $\overrightarrow{AT} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC}$  alors

$$t_{\overline{OC}}(A) = T$$

On a Avarie sur le cercle C alors T varie sur le cercle C'' image de C par  $t_{\overline{OC}}$ .

6

## S'ENTRAINER



$$1/\text{On a } t_{CI}(C) = I$$



On a  $I = A * C$  alors  $\overline{CI} = \overline{IA}$  alors  $t_{\overline{CI}}(I) = A$

D'où  $t_{\overline{CI}}([CI]) = [IA]$

On a  $\zeta$  est le cercle de diamètre  $[CI]$

alors  $t_{\overline{CI}}(\zeta)$  le cercle de diamètre

$t_{\overline{CI}}([CI]) = [IA]$  alors  $t_{\overline{CI}}(\zeta) = \zeta'$

2) Dans le triangle ABC on  $I = A * C$  et  $K = A * B$

Alors  $\overline{JK} = \frac{1}{2} \overline{CA}$

Alors  $\overline{JK} = \overline{CI}$  alors  $t_{\overline{CI}}(J) = K$

Or  $t_{\overline{CI}}(C) = I$

Alors  $t_{\overline{CI}}((JC)) = (IK)$

Or  $(JC) = (BC)$  alors  $t_{\overline{CI}}((BC)) = (IK)$

3)a)  $M' = t_{\overline{CI}}(M)$  ?  $M \in (BC) \cap \zeta$

$t_{\overline{CI}}(M) \in t_{\overline{CI}}((BC)) \cap t_{\overline{CI}}(\zeta)$

$t_{\overline{CI}}(M) \in (IK) \cap (\zeta')$  ;  $t_{\overline{CI}}(M) \in \{I, M'\}$

Or  $t_{\overline{CI}}(C) = I$  et  $M \neq I$  alors  $t_{\overline{CI}}(M) = M'$

b) On a :  $J = B * C$  alors  $t_{\overline{CI}}(J) = t_{\overline{CI}}(B) * t_{\overline{CI}}(C)$   
alors  $K = B' * I$

5) ABC un parallélogramme alors  $\overline{AD} = \overline{BC}$  alors  
 $t_{\overline{BC}}(A) = D$

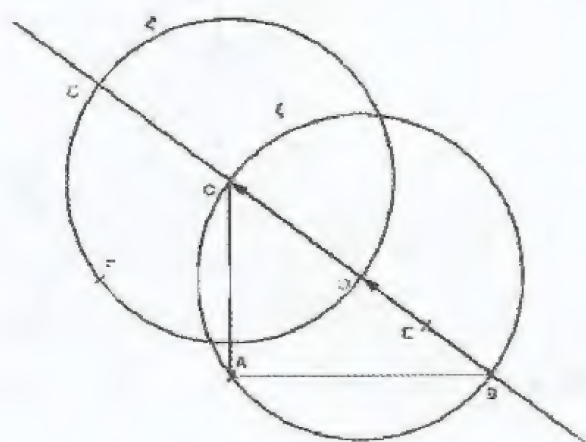
On a ABC triangle rectangle en A alors A varie sur  
le cercle  $\zeta_1$  de diamètre  $[BC]$  privé de B et C.

Alors D varie sur  $t_{\overline{BC}}(\zeta_1)$  privé de  $t_{\overline{BC}}(B)$  et  
 $t_{\overline{BC}}(C)$ .

Alors D varie  $\zeta'_1$  privé C et  $C' = t_{\overline{BC}}(C)$

Avec  $\zeta'_1$  est le cercle de diamètre  $[CC']$

## 7 S'ENTRAINER



1) E barycentre de  $(B, 3)$  et  $(C, 1)$  donc  $\overline{BE} = \frac{1}{4} \overline{BC}$

2) F est le barycentre des points pondérés  $(A, 1)$ ,  
 $(E, 2)$  et  $(B, -2)$ .

Donc

$$\overline{AF} = \frac{2}{1+2-2} \overline{AE} + \frac{-2}{1+2-2} \overline{AB} = 2\overline{AE} - 2\overline{AB}$$

$$= 2(\overline{AE} + \overline{BA}) = 2(\overline{BA} + \overline{AE}) = 2\overline{BE} = \frac{1}{2} \overline{BC}$$

3) On a On a  $f(M) = M'$  signifie  $2\overline{AM'} = 2\overline{AM} - \overline{MB} + \overline{MC}$

signifie  $2\overline{AM'} - 2\overline{AM} + \overline{MB} - \overline{MC} = \vec{0}$

signifie  $2(\overline{AM'} - \overline{AM}) + \overline{MB} - \overline{MC} = \vec{0}$

signifie  $2\overline{MM'} + \overline{MB} - \overline{MC} = \vec{0}$

signifie  $2\overline{MM'} + \overline{MB} + \overline{CM} = \vec{0}$

signifie  $2\overline{MM'} + \overline{CB} = \vec{0}$

signifie  $\overline{MM'} = \overline{BO}$

D'où  $f = t_{\overline{BO}}$

4)  $O = B * C$ ,  $\zeta(O, OC)$  et  $\zeta'(C, OC)$

\* On a l'image de  $\zeta$  par  $t_{\overline{BO}}$  est le cercle de  
centre  $t_{\overline{BO}}(O) = C$

et de même rayon d'où  $t_{\overline{BO}}(\zeta) = \zeta'$

\*  $t_{\overline{BO}}((BC)) = (BC)$  car  $(BO) \parallel (BC)$

\* On a :  $C \in \zeta \cap BC$

alors  $t_{\overline{BO}}(C) \in t_{\overline{BO}}(\zeta) \cap t_{\overline{BO}}((BC))$

alors  $t_{\overline{BO}}(C) \in (\zeta') \cap (BC)$

alors  $t_{\overline{BO}}(C) \in \{O, C'\}$

alors  $t_{\overline{BO}}(C) = O$  où  $t_{\overline{BO}}(C) = C'$

On a  $\overline{BO} \neq \overline{CO}$  alors  $t_{\overline{BO}}(C) \neq O$  donc  $t_{\overline{BO}}(C) = C'$

b) Soit  $A' = f(A)$

$$\text{On a } \overline{AA'} = \overline{BO} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \overline{AF}$$

D'où  $A' = F$

c) on a :  $\overline{BO} = \overline{AF}$  alors  $t_{\overline{BO}}(A) = F$

On a A varie sur  $\zeta$  alors  $t_{\overline{BO}}(A)$  varie sur  
 $t_{\overline{BO}}(\zeta)$  alors F varie sur  $\zeta'$ .

d) On a :  $t_{\overline{BO}}(E) = E'$ ,  $t_{\overline{BO}}(B) = O$ ,  $t_{\overline{BO}}(C) = C'$



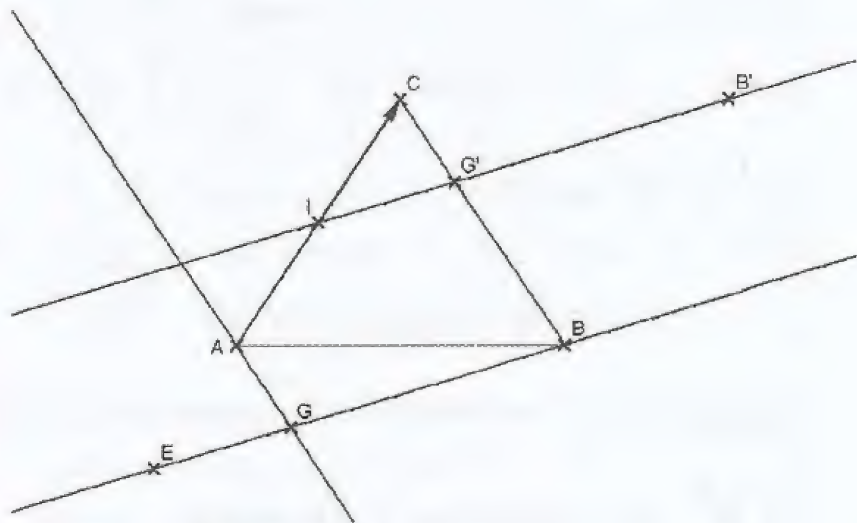


On a  $E$  est le barycentre de  $(B,3)(C,1)$  Alors  $E'$  est le barycentre de  $(O',3)(C',1)$

(Car la translation conserve le barycentre)

8

S'ENTRAINER

x<sup>c</sup>

$$1) \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$$

$$2)a) \text{ On a : } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{-1}{3} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{CA}$$

$$= \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{3} \overrightarrow{CB}$$

b) On  $G$  est le barycentre des points pondérés  $(A,3)(C,-1)(B,1)$

Alors  $G$  bar  $(E,3+(-1))(B,1)$

Alors  $G$  bary  $(E,2)(B,1)$

Alors  $G, E$  et  $B$  sont alignés.

c) D'après 2)b) on a  $G \in (BE)$

alors 2/a on a  $(AG) // (CB)$

Alors  $G$  appartient à la droite  $\Delta$  passant par  $A$  et  $//$  à  $(BC)$ .

D'où  $G$  est l'intersection de  $\Delta$  et  $(BE)$

3/On a  $\underbrace{CA=CB}_{\text{Constante}}$  alors  $A$  varie sur le cercle  $\zeta_{(C,CB)}$

On a  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CB}$  (vecteur constant)

Alors  $t_{\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}}(A) = G$

On a  $A$  varie sur le cercle  $\zeta$  de centre  $C$  et de rayon  $CB$  alors  $G$  varie sur le cercle  $\zeta' = t_{\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}}(\zeta)$  de centre  $t_{\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}}(C)$  et de rayon  $CB$ .

4/ Montons  $f(M) = M'$  équivaut  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AC}$  ?

On a

$$f(M) = M' \text{ équivaut } 2\overrightarrow{ME} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{CA}$$

$$\text{équivaut } 2(\overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{ME}) = (3-1)\overrightarrow{ME} + 2\overrightarrow{CA}$$

$$\text{équivaut } 2\overrightarrow{M'M} + 2\overrightarrow{ME} = 2\overrightarrow{ME} + 2\overrightarrow{CA}$$

$$\text{équivaut } 2\overrightarrow{M'M} = 2\overrightarrow{CA}$$

$$\text{équivaut } \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AC}$$

D'où  $f$  est la translation de vecteur  $\overrightarrow{AC}$ .

b)  $f(B) = B'$  équivaut  $t_{\overrightarrow{AC}}(B) = B'$

$$\text{équivaut } \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AC}$$

$f(C) = C'$  équivaut  $t_{\overrightarrow{AC}}(C) = C'$  équivaut  $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC}$

c)  $f(E) = I$  ?  $t_{\overrightarrow{AC}}(E) = I$  ?

On a :  $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$  (car  $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$ ) et  $I = A * C$

D'où  $t_{\overrightarrow{AC}}(E) = I$

5/a)  $f((AG))$  ?

L'image de  $(AG)$  par  $t_{\overrightarrow{AC}}$  est la droite parallèle à  $(AG)$  et passant par  $t_{\overrightarrow{AC}}(A) = C$

D'où  $t_{\overrightarrow{AC}}((AG)) = (BC)$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ On a } t_{\overrightarrow{AC}}(E) = I \\ t_{\overrightarrow{AC}}(B) = B' \end{array} \right\} \text{ alors } t_{\overrightarrow{AC}}((EB)) = (IB')$$

$$\text{Alors } t_{\overrightarrow{AC}}((EG)) = (IB')$$

b)

On a  $G \in (AG) \cap (EG)$

Alors  $t_{\overrightarrow{AC}}(G) \in t_{\overrightarrow{AC}}((AG)) \cap t_{\overrightarrow{AC}}((EG))$

$$\in (BC) \cap (IB')$$

$$\in \{G'\}$$



D'où  $t_{\overline{AC}}(G) = G'$

On a :  $\begin{cases} G \text{ est le barycentre de } (A,3), (B,1) \text{ et } (C,-1) \\ t_{\overline{AC}}(G) = G', t_{\overline{AC}}(A) = C, \\ t_{\overline{AC}}(B) = B' \text{ et } t_{\overline{AC}}(C) = C' \end{cases}$

Comme une translation conserve le barycentre alors  $G'$  est le barycentre de  $(C,3)$  et  $(B',1)$  et  $(C',-1)$

## 9 S'ENTRAINER

On considère un rectangle ABCD et un point E n'appartient à (AB)

On désigne par C', D' et E' les projetés orthogonaux respectifs de C, D et E sur les droites

(AE), (BE) et (AB). (Voir figure au dessous)

1) On a  $(EE') \parallel (AD)$  alors  $t_{\overline{AD}}((EE')) = (EE')$

2) Soit  $T_1$  la hauteur issue de B dans le triangle ABE et  $T_2$  la hauteur issue de A dans le triangle ABE.

\*On  $B \in T_1$  alors l'image de  $T_1$  par  $t_{\overline{AD}}$  est la

droite passant par  $t_{\overline{AD}}(B) = C$  et parallèle à (AD)

Alors  $t_{\overline{AD}}(T_1) = (CC')$ .

\*On  $A \in T_2$  alors l'image de  $T_2$  par  $t_{\overline{AD}}$  est la

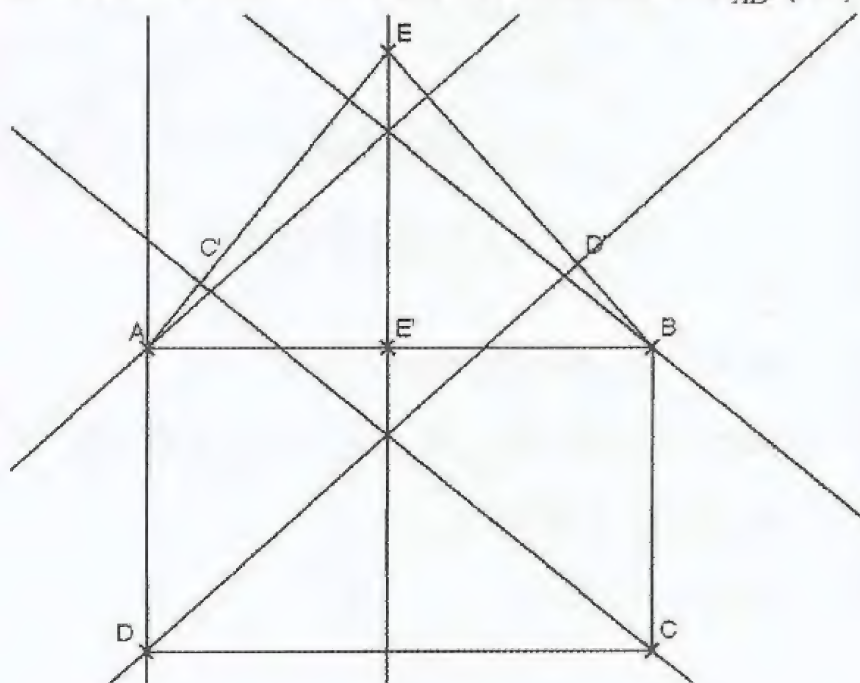
droite passant par  $t_{\overline{AD}}(A) = D$  et parallèle à (AD)

Alors  $t_{\overline{AD}}(T_2) = (DD')$ .

Déterminer les images de  $T_1$  et  $T_2$  par  $t_{\overline{AD}}$

3) On a  $T_1$  et  $T_2$  et  $(EE')$  sont concourantes en H orthocentre de ABE alors leurs images par  $t_{\overline{AD}}$

$(CC')$ ,  $(DD')$  et  $(EE')$  sont concourantes en  $t_{\overline{AD}}(H)$ .



10

## S'ENTRAINER

• On a ABC est un triangle rectangle en C alors C varie sur le cercle  $\zeta$  de diamètre  $[AB]$  privé de A et B.

• On a ABCM est un parallélogramme alors  $\overline{CM} = \overline{GA}$  alors  $t_{\overline{BA}}(C) = M$

On a C varie sur  $\zeta$  privé de A et B

Alors  $t_{\overline{BA}}(C)$  varie sur  $t_{\overline{BA}}(\zeta)$  privée de  $t_{\overline{BA}}(A)$  et  $t_{\overline{BA}}(B)$

Alors M varie sur  $\zeta'$  privée de A' et A avec  $\zeta' = t(\zeta)$  et  $A' = t(A)$

**Conclusion:** E est le cercle  $\zeta'$  privé de A et A'.

11

## SE PERFECTIONNER

1) On a :  $OA = OM$  alors OAM est un triangle isocèle O

Or  $E = A * M$  alors  $(OE) \perp (AM)$

Alors OEM est un triangle rectangle en E

Alors E varie sur le cercle  $\zeta'$  de diamètre  $[OM]$

2) On a :  $I = A * F$  et  $I = O * M$  alors  $\overline{AO} = \overline{MF}$

alors  $t_{\overline{AO}}(M) = F$

On a : M varie sur  $\zeta$  privé de A

alors F varie sur  $\zeta'' = t_{\overline{AO}}(\zeta)$  privé de

$t_{\overline{AO}}(A) = O$

12

## SE PERFECTIONNER

On a  $\overline{MM'} = \overline{AB}$  alors  $t_{\overline{AB}}(M) = M'$

On a :  $M \in D$  alors  $t_{\overline{AB}}(M) \in t_{\overline{AB}}(D)$

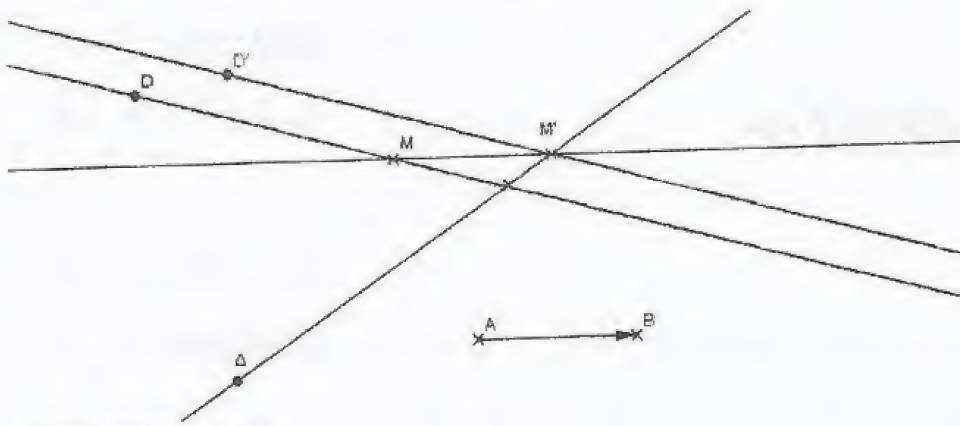
alors  $M' \in t_{\overline{AB}}(D)$

alors  $M' \in D'$  avec  $D' = t_{\overline{AB}}(D)$

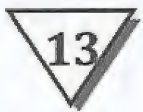
D'autre part  $M' \in \Delta$  alors  $M' \in \Delta \cap D'$

Or  $D \parallel D'$  alors  $\Delta$  et  $D'$  sont sécante en un point qui est  $M'$



**Construction :**

- On construit  $D' = t_{AB}(D)$
- $D'$  coupe  $\Delta$  en  $M'$
- On construit  $M$  l'antécédent de  $M'$  par  $t_{AB}$ .

**SE PERFECTIONNER**

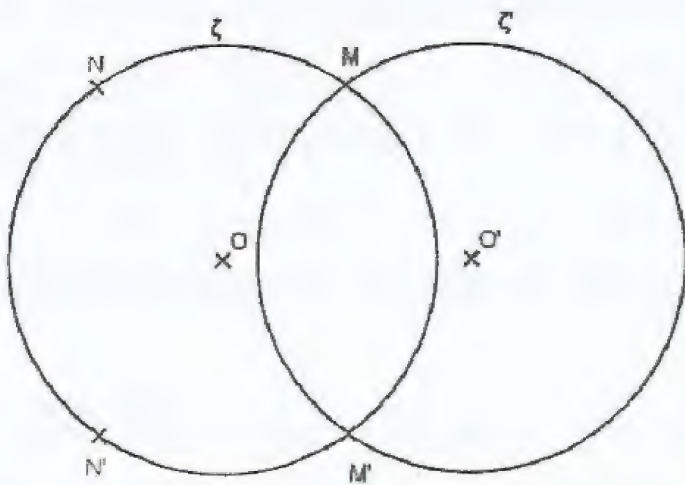
A et B deux points distincts et extérieurs à  $\mathcal{C}$ .

ABNM soit un parallélogramme alors  $\overline{AB} = \overline{NM}$   
 alors  $t_{AB}(N) = M$

On a  $N \in \mathcal{C}$  alors  $t_{AB}(N) \in t_{AB}(\mathcal{C})$  alors  $M \in \mathcal{C}'$

où  $\mathcal{C}' = t_{AB}(\mathcal{C})$

D'autre part  $M \in \mathcal{C}$  alors  $M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$

**Construction :**

- On construit  $\mathcal{C}' = t_{AB}(\mathcal{C})$
- $\mathcal{C}'$  coupe  $\mathcal{C}$  en deux points M et M' (donc on a deux solutions)
- La parallèle à (AB) passant M recoupe  $\mathcal{C}$  en N
- La parallèle à (AB) passant M' recoupe  $\mathcal{C}$  en N'



## Homothétie

### 1) Résumé de cours

#### A) Définition d'une homothétie:

##### 1) Définition :

Soient I un point du plan et k un réel non nul donné.

L'application h de P dans P tel que  $h(M)=M'$  signifie  $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$ ; s'appelle l'homothétie de centre I et de rapport k.

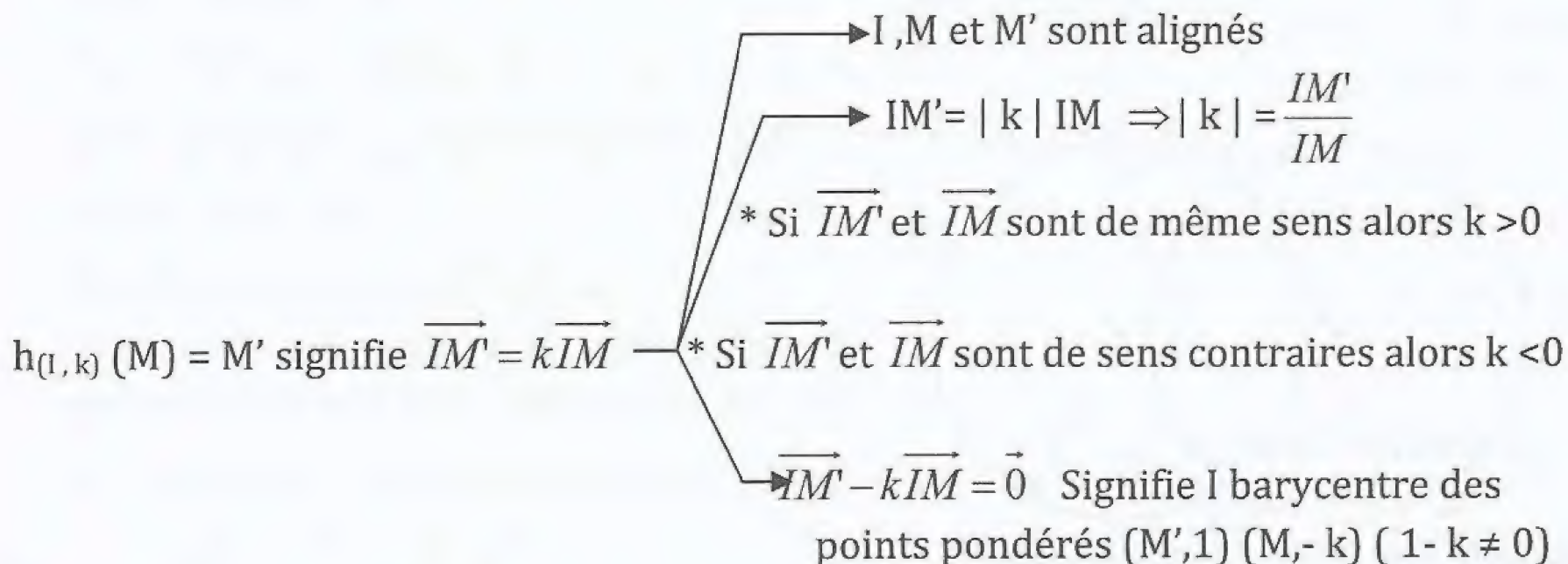
L'application h est noté  $h = h_{(I,k)}$ .

$$h_{(I,k)}(M) = M' \text{ signifie } \overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$$

##### 2) Cas particuliers : $h_{(I,1)}$ est l'identité du plan noté $Id_P$

$h_{(I,-1)}$  est la symétrie centrale  $S_I$ .

##### Remarques:



##### Retenons:

Si  $h_{(I,k)}(M) = M'$  alors le centre I de h appartient à (MM')

##### 3) Propriétés :

• **Propriété 1 :** Le centre d'une homothétie h de rapport différent de 1 est le seul point invariant.

• **Propriété 2 :** L'homothétie de centre I et de rapport k est une bijection de P sur lui-même et son application réciproque est l'homothétie de centre I et de rapport  $\frac{1}{k}$

$$h_{(I,k)}(M) = M' \text{ signifie } h_{(I,\frac{1}{k})}(M') = M$$



• **Propriété 3 :**

$$\left. \begin{array}{l} h_{(I, k)}(A) = A' \\ h_{(I, k)}(B) = B' \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = k \overrightarrow{AB} \quad \begin{array}{l} \nearrow A'B' = |k| AB \\ \searrow (A'B') // (AB) \end{array}$$

• **Propriété 4:** Toute homothétie conserve les écarts angulaires

Si  $h(A)=A'$ ,  $h(B)=B'$  et  $h(C)=C'$  on a  $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$

• **Propriété 5 :** Toute homothétie du plan conserve l'alignement, les milieux, les barycentres

**4) Images de figures simples par une homothétie:**

Soit  $h_{(I, k)}$  une homothétie :

- L'image d'une droite  $\Delta$  par  $h$  est une droite qui lui est parallèle en particulier si  $I \in \Delta$  alors  $h(\Delta) = \Delta$
- Un segment  $[AB]$  en un segment  $[A'B']$  avec  $A' = h(A)$  et  $B' = h(B)$ .
- Une demi-droite en une demi-droite.

L'image d'un cercle  $\mathcal{C}(O, r)$  par  $h$  est un cercle  $\mathcal{C}'(O', r')$  avec  $O' = h(O)$  et  $r' = |k| r$

**II) Exercices**

**1 APPLIQUER**

Soient A et B deux points distincts du plan.

Soit  $f$  l'application définie sur P par  $f(M) = M'$  signifie  $2\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{BM'} = \vec{0}$

- 1) Vérifier que  $f(A) = B$
- 2) Montrer que  $f$  admet un unique point invariant I.
- 3) Montrer que  $f$  est une homothétie que l'on caractérisera.

**2 APPLIQUER**

Soit A, B et C trois points non alignés

Soit  $f$  l'application définie sur P par  $f(M) = M'$  signifie  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$

- 1) Montrer que  $f$  admet un unique point invariant I.
- 2) Montrer que  $f$  est une homothétie que l'on caractérisera.

**3 APPLIQUER**

Soit un segment  $[AB]$ ,

Déterminer et construire le centre I de l'homothétie de rapport  $-2$  tel que  $h(A) = B$



#### 4 APPLIQUER

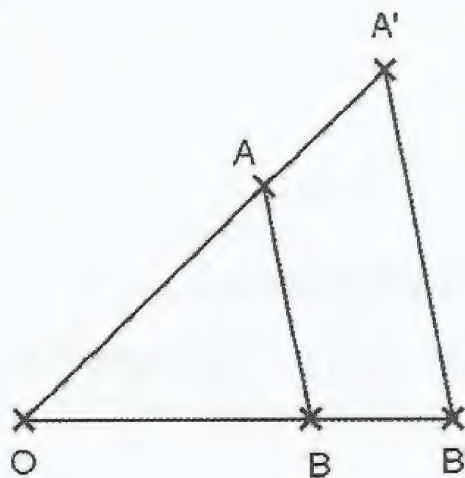
Soit  $ABB'A'$  un trapèze de bases  $[AB]$  et  $[A'B']$  tel que  $A'B' = \frac{1}{3} AB$ .

$E$  le milieu de  $[AB]$  et  $F$  le milieu de  $[A'B']$ . Soit  $h$  l'homothétie tel que  $h(A) = A'$  et  $h(B) = B'$

- 1) Déterminer  $O$  le centre de  $h$ .
- 2) Montrer que  $h(E) = F$ .
- 3) Soit l'homothétie  $h'$  tel que  $h'(A) = B'$  et  $h(B) = A'$ 
  - a) Déterminer le centre de  $O'$  et le rapport  $k'$  de  $h'$ .
  - b) Montrer que  $O, O', E$  et  $F$  sont alignés.

#### 5 APPLIQUER

On considère la figure ci-dessous où  $AB = 2$  et  $A'B' = 3$



Soit  $h$  l'homothétie de centre  $O$  et tel que  $h(A) = A'$

- 1) Déterminer  $k$  le rapport de  $h$
- 2) Montrer que  $h(B) = B'$

#### 6 APPLIQUER

Soit  $ABCD$  un trapèze de base  $[AB]$  et  $[CD]$  tel que  $AB = 3, CD = 5$  et  $BC = 3$

Soit  $h$  l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $k$  telle que  $h(A) = C$  et  $h(B) = D$

- 1) Déterminer le centre  $O$  et le rapport  $k$  de  $h$
- 2) Construire  $\Delta = h(BC)$  et en déduire une construction simple du point  $E = h(C)$
- 3) Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de diamètre  $[BC]$ . Déterminer  $\mathcal{C}' = h(\mathcal{C})$
- 4) Soit  $\Delta'$  la parallèle à  $(AD)$  passant par  $O$ ,  $\Delta'$  coupe  $(AB)$  en  $M$  et  $(CD)$  en  $N$

Montrer que  $h(M) = N$  et que  $\overrightarrow{NC} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{ND}$



## 7 S'ENTRAINER

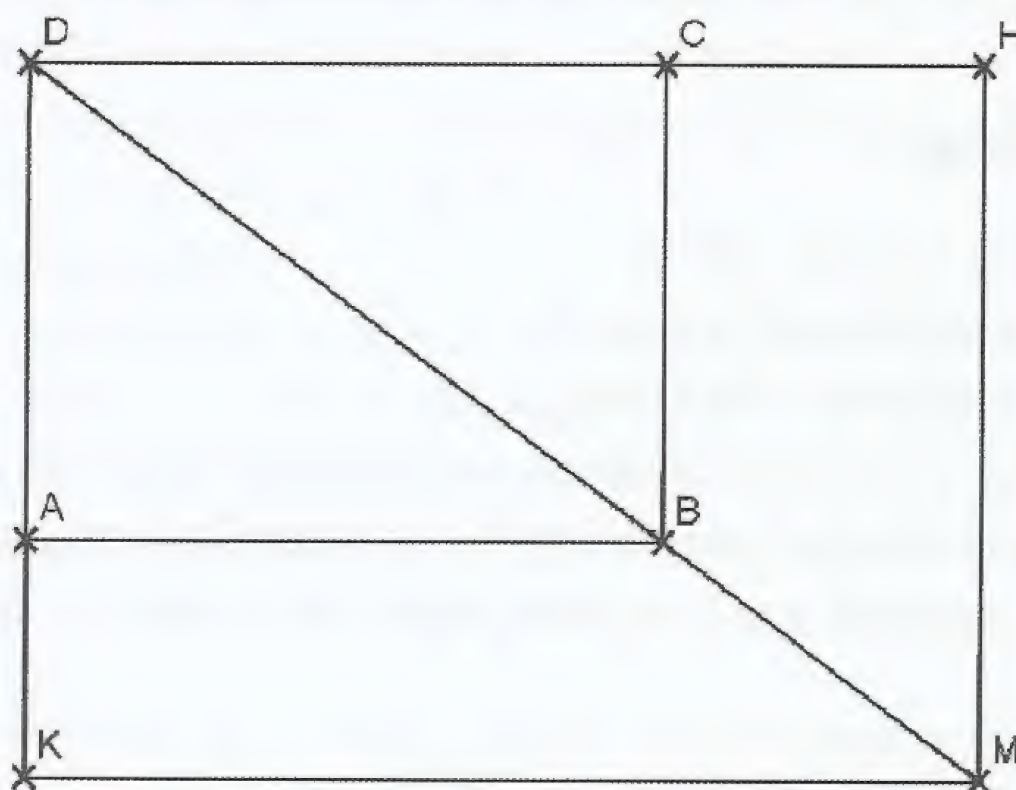
Soit ABCD un rectangle tel que  $AB = 4$  et  $AD = 3$ . Soit M le point défini par  $\overrightarrow{DM} = \frac{3}{2} \overrightarrow{DB}$

H est le projeté orthogonal de M sur (CD) et K le projeté orthogonal de M sur (AD).

1) Montrer que  $\overrightarrow{DH} = \frac{3}{2} \overrightarrow{DC}$

2) Soit h l'homothétie de centre D et de rapport  $\frac{3}{2}$ . Déterminer h(B), h(C) et h(A).

3) Quelle est la nature du quadrilatère MHDK ? Déterminer son périmètre et son aire.



## 8 S'ENTRAINER

Soit un triangle ABC. On désigne par I, J, et K les milieux respectifs des cotés [AB], [AC] et [BC] et par G le centre de gravité du triangle ABC.

Soit l'homothétie h de centre G et de rapport  $-\frac{1}{2}$

1) Déterminer les images respectives de A, B et C par h.

2) Soit H l'orthocentre du triangle ABC et O le centre de son cercle circonscrit.

a) Déterminer h(AH) et h(BH)

b) En déduire que les points O, G et H sont alignés.

## 9 S'ENTRAINER

On considère les cercles  $\mathcal{C}(O, 5)$  et  $\mathcal{C}'(O', 2)$  tel que  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont tangents intérieurement en A. la droite (OO') recoupe  $\mathcal{C}$  en C et  $\mathcal{C}'$  en B





- 1) Faire une figure
- 2) Déterminer le rapport  $k$  de l'homothétie  $h$  de centre  $A$  tel que  $h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$ .
- 3) Soit  $E$  un point variable de  $\mathcal{C}$  distincts de  $A$  et  $C$ , la droite  $(AE)$  recoupe  $\mathcal{C}'$  en  $F$ .
  - a) Montrer que  $h(E) = F$ .
  - b) Montrer que  $(EC) \parallel (BF)$ .
  - c) Calculer le rapport  $\frac{BF}{EC}$  et  $\frac{\text{Aire}(AEC)}{\text{Aire}(ABF)}$
- 4) Les droites  $(BE)$  et  $(FC)$  se coupent en un point  $I$ .
  - a) Montrer que  $I$  est l'image de  $E$  par l'homothétie  $h'$  de centre  $B$  et de rapport  $2/7$ .
  - b) Déterminer l'ensemble des points  $I$  lorsque  $E$  varie sur  $\mathcal{C}$ .
- 5) Soit  $K$  le milieu de  $[BF]$  et  $L$  le milieu de  $[EC]$ . Montrer que  $A, K, I$  et  $L$  sont alignés.

**S'ENTRAINER**

Soit  $A$  et  $B$  deux points tels que  $AB = 5$

Soit le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $A$  et de rayon 3.

Soit le cercle  $\mathcal{C}'$  de centre  $B$  et de rayon 2.

- 1) Justifier pourquoi  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont tangents extérieurement en un point  $O$ .
- 2) Déterminer le rapport  $k$  de homothétie  $h$  de centre  $O$  qui transforme  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{C}'$ .
- 3) Soit  $\Delta$  une droite passant par  $O$  et non perpendiculaire à  $D$ .  $\Delta$  coupe  $\mathcal{C}$  en  $E$  et  $\mathcal{C}'$  en  $F$ .
  - a) Montrer que  $h(E) = F$ .
  - b) Soit  $I = A * E$  et  $J = B * F$  montrer que  $O, I$  et  $J$  sont alignés
- 4) On suppose que  $\Delta$  est variable déterminer et construire l'ensemble décrit par :
  - a) Le milieu  $I$  de  $[AE]$ .
  - b) Le centre de gravité  $G$  du triangle  $OAE$

**S'ENTRAINER**

$MNO$  est un triangle rectangle en  $M$  tel que  $OM = 4,5$  et  $MN = 3$  (l'unité étant le cm)

Soit  $h$  l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $\frac{5}{3}$ .

- 1) Construire le point  $P$  l'image du point  $N$  par l'homothétie  $h$ .
- 2) Soit  $Q$  le projeté orthogonal du  $P$  sur la droite  $(OM)$ 
  - a) Déterminer l'image de la droite  $(MN)$  par l'homothétie  $h$ .
  - b) Montrer que  $h(M) = Q$
  - c) En déduire les distances  $OQ$  et  $PQ$ .



3) Déterminer le centre I et le rapport k de l'homothétie  $h'$  qui transforme M en P et N en Q.

4) On désigne par  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  les cercles des centres respectives M et P qui sont tangents en I.

a) Montrer que  $h'(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$

b)  $\mathcal{C}$  coupe [MN] en A et  $\mathcal{C}'$  coupe [PQ] en B. Montrer que les points A, I et B sont alignés.

12

### SEPERFECTIONNER

Soit: ABCD un trapèze tel que :  $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4} \overrightarrow{DC}$

1) Existe-il une homothétie qui transforme A en B et D en C

2) Soit h une homothétie de centre O et de rapport k telle que  $h(D) = A$  et  $h(C) = B$ .

a) Déterminer et construire le point O

b) Déterminer le rapport k

c) Construire E et F images respectives de A et B par cette homothétie h

d) Comparer les aires respectives de trapèze ABCD et EFBA.

3) Les droites (AC) et (BD) se coupent en I et on pose J le point tel que CIDJ parallélogramme, Montrer que les points O, I et J sont alignés

4) x étant un réel quelconque, soit M un point variable du plan tel que

$\overrightarrow{DM} = \frac{x^2}{2x^2 + 1} \overrightarrow{DC}$  la droite (OM) coupe (AB) en N, Montrer que  $N = h(M)$

13

### SEPERFECTIONNER

Soit A, B et C trois points du plan tels que  $BC = 4$  et  $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$

Soit  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux cercles de diamètres respectifs [AB] et [AC]

Une droite D non perpendiculaire à (AB) et distincte de (AB) passant par A recoupe  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  respectivement en M et N. Soit J le point d'intersection de (BN) et (CM).

1) Faire une figure.

2) Soit h l'homothétie qui transforme B en N et M en C.

Déterminer le centre et le rapport de h.

3) Montrer que J est l'image de N par une homothétie  $h'$  de centre B dont on déterminera le rapport.

14

### SEPERFECTIONNER

Soit un cercle fixe  $\mathcal{C}$  de centre O et de rayon 3 et soit A un point extérieur à C et fixe.

Soit M un point mobile de  $\mathcal{C}$ .





Déterminer lorsque  $M$  varie sur  $\mathcal{C}$  l'ensemble sur le quel varie le centre de gravité  $G$  du triangle  $AOM$ .

**15****SEPERFECTIONNER**

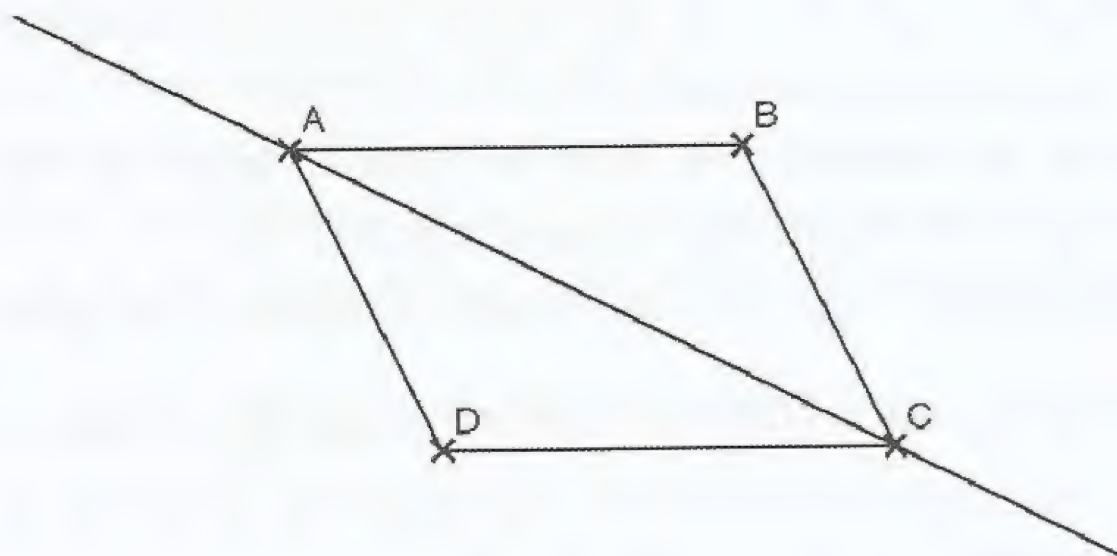
Soit  $D$  et  $\Delta$  deux droites sécantes et  $A$  un point n'appartenant ni à  $D$  ni à  $D'$ .

Construire un point  $M$  de  $D$  et un point  $N$  de  $\Delta$  tel que  $3\overrightarrow{AM} + 8\overrightarrow{NA} = \vec{0}$

**16****SEPERFECTIONNER**

Soit un parallélogramme  $ABCD$

Déterminer l'ensemble  $E$  des centres des homothéties qui transforme les droites  $(AB)$  et  $(AD)$  respectivement en  $(CD)$  et  $(BC)$





**1 APPLIQUER**

Soient A et B deux points distincts du plan.

Soit f l'application définie sur P par  $f(M) = M'$

signifie  $2\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{BM} = \vec{0}$

1) Vérifier que  $f(A) = B$

On a :  $2\overrightarrow{AA} - 3\overrightarrow{BA} = 2\vec{0} - 3\vec{0} = \vec{0}$  alors  $f(A) = B$

2) Si I un point invariant par f signifie

$$f(I) = I$$

Signifie  $2\overrightarrow{AI} - 3\overrightarrow{BI} = \vec{0}$

Signifie  $-2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Signifie I barycentre  $(A, -2)(B, 3)$

On a  $(-2) + 3 = 1 \neq 0$  D'où I existe et il est unique

3) Montrons que pour tout  $M \in P, f(M) = M'$

signifie  $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$ ?

Pour tous  $M \in P, f(M) = M'$  signifie

$2\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{BM} = \vec{0}$  Signifie  $2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{IM} - 3\overrightarrow{BI} - 3\overrightarrow{IM} = \vec{0}$

Signifie  $-2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IM} - 3\overrightarrow{IM} = \vec{0}$

Signifie  $\vec{0} + 2\overrightarrow{IM} - 3\overrightarrow{IM} = \vec{0}$  (car I barycentre de  $(A, -1)(B, 3)$ )

Signifie  $\overrightarrow{IM'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IM}$

D'où f est l'homothétie de centre I et de rapport  $\frac{2}{3}$ .

**2 APPLIQUER**

Soit A, B et C trois points non alignés

Montrons que pour tout  $M \in P, f(M) = M'$

signifie  $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$ ?

\*Montrons que f admet un unique point invariant I.

Si I un point invariant par f signifie  $f(I) = I$

Signifie  $\vec{0} = \overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC}$

Signifie  $\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Signifie I le barycentre de  $(A, 1), (B, -3)$  et  $(C, -2)$

$1 + (-3) + (-2) = -4 \neq 0$  d'où I existe et il est unique

\*Montrons que pour tout  $M \in P, f(M) = M'$

signifie  $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$ ?

On a pour tout  $M \in P, f(M) = M'$  signifie

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$$

signifie  $\overrightarrow{MM'} = (1 - 3 - 2)\overrightarrow{MI}$

signifie  $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IM'} = -4\overrightarrow{MI}$

signifie  $\overrightarrow{IM'} = 4\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM}$

signifie  $\overrightarrow{IM'} = 5\overrightarrow{IM}$

D'où f est l'homothétie de centre I et de rapport 5.

**3 APPLIQUER**

Soit un segment [AB]

$h_{(I, -2)}(A) = B$  signifie  $\overrightarrow{IB} = -2\overrightarrow{IA}$  Signifie  $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Signifie I barycentre  $(A, 2)(B, 1)$

Signifie  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

**4 APPLIQUER**

Soit ABB'A' un trapèze de bases [AB] et [A'B'] tel

que  $A'B' = \frac{1}{3}AB$ .

Et le milieu de [AB] et F le milieu de [A'B'] .

1) Soit O le centre de h

$h(A) = A'$  donc  $O \in (AA')$

$h(B) = B'$  donc  $O \in (BB')$

Donc  $O \in (AA') \cap (BB')$

2) On a :  $E = A * B \Rightarrow h(E) = h(A) * h(B)$  (Car h conserve le milieu)  $= A' * B'$

3)  $h'(A) = B'$  ,  $h'(B) = A'$

a) Soit O' le centre de h'

$h'(A) = B'$  alors  $O' \in (AB')$

$h'(B) = A'$  alors  $O' \in (BA')$

Donc  $O' \in (AB') \cap (BA')$

$\left. \begin{array}{l} h'(A) = B' \\ h'(B) = A' \end{array} \right\}$  alors  $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{BA}$  et  $A'B' = |k|BA$

alors  $|k| = \frac{A'B'}{BA}$  alors  $|k| = \frac{1}{3}$

On a :  $k' < 0$  Car  $\overrightarrow{A'B'}$  et  $\overrightarrow{BA}$  sont de sens contraire

**Conclusion :**  $k' = -\frac{1}{3}$



b/ On a :  $E = A * B \Rightarrow h'(E) = h'(A) * h'(B)$

$$\Rightarrow h'(E) = B' * A' \Rightarrow h'(E) = F$$

On a :  $h'(E) = F$  et  $O'$  est le centre de l'homothétie donc  $O', E, F$  alignés (1)

Or  $h(E) = F$  alors  $O, E, F$  alignés (2)

D'après (1) et (2)  $O, O', E, F$  sont alignés

### 5 APPLIQUER

1)  $h$  de centre  $O$  tel que  $h(A) = A'$

$$h(A) = A' \Rightarrow \overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA} \text{ et } OA' = |k|OA \quad \text{alors}$$

$$|k| = \frac{OA'}{OA}$$

Or  $\overrightarrow{OA'}$  et  $\overrightarrow{OA}$  sont colinéaires de même sens

$$\text{alors } k > 0 \text{ alors } k = \frac{OA'}{OA}$$

Dans le triangle  $OA'B'$  On a :

$$\left. \begin{array}{l} (AB) \parallel (A'B') \\ A \in (OA') \\ B \in (OB') \end{array} \right\} \text{ D'après le théorème de Thalès}$$

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{3}{2} \text{ Alors } k = \frac{3}{2}$$

2)  $h(B) = B' ?$

On a :  $\overrightarrow{OB'}$  et  $\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$ . On a la même direction, le même sens et la même longueur alors  $\overrightarrow{OB'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$

alors  $h(B) = B'$

**2ème méthode :**

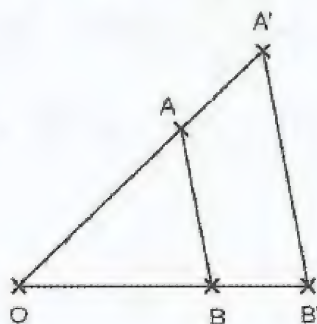
On a :

$$B \in (OB) \cap (AB) \text{ alors } h(B) \in h((OB)) \cap h((AB))$$

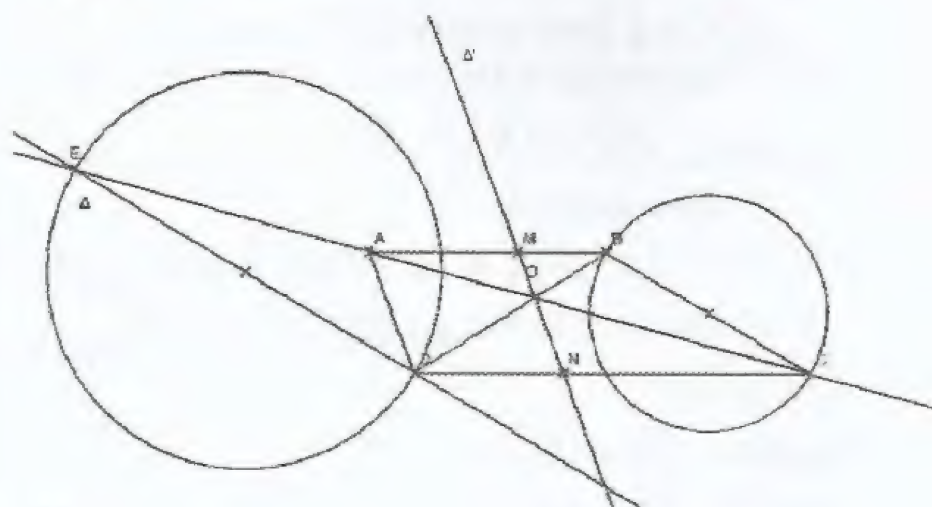
$$h((OB)) = (OB) \text{ car } (OB) \text{ passe par le centre de } h$$

$h((AB))$  est la droite passant par  $h(A) = A'$  et parallèle à  $(AB)$  alors  $h((AB)) = (A'B')$

$$\text{D'où } h(B) \in (OB) \cap (A'B') \in \{B'\} \Rightarrow h(B) = B'$$



### 6 APPLIQUER



1)

•  $h(A) = C$  alors  $O \in (AC)$

$h(B) = C$  alors  $O \in (BD)$

D'où  $O \in (AC) \cap (BD)$

• On a  $h(A) = C$  et  $h(B) = D$

$$\text{Alors } CD = |k|AB \text{ alors } |k| = \frac{CD}{AB} = \frac{5}{3}$$

Or  $h(A) = C$  alors  $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA}$  alors  $k < 0$  (car  $\overrightarrow{OC}$  et  $\overrightarrow{OA}$  sont colinéaire de sens contraires)

$$\text{alors } k = -\frac{5}{3}$$

2) •  $h((BC))$  est la droite passant par  $h(B) = D$  et parallèle à  $(BC)$

alors  $\Delta$  la droite passant par  $D$  et parallèle à  $(BC)$

• On a  $C \in (BC)$  alors  $h(C) \in h((BC))$

$$\text{alors } E \in \Delta$$

$$\text{On a } h(C) = E \text{ alors } E \in (OC)$$

**Conclusion :**  $\{E\} = \Delta \cap (OC)$

3)  $\zeta$  de diamètre  $[BC]$  et  $\zeta' = h(\zeta)$  alors  $\zeta'$  est le cercle de diamètre  $h([BC]) = [DE]$

4) On a  $M \in (AB) \cap \Delta$

$$\text{alors } h(M) \in h((AB)) \cap h(\Delta)$$

$$\text{alors } h(M) \in (DC) \cap \Delta$$

$$\text{alors } h(M) \in \{N\}$$



Alors  $h(M) = N$

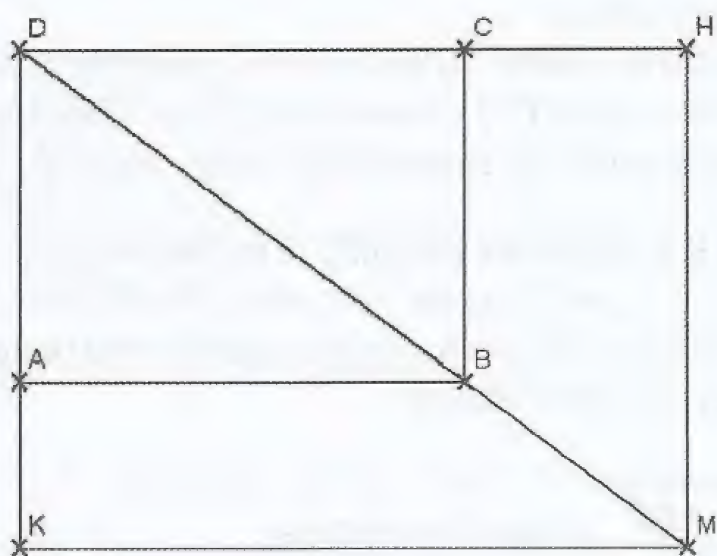
• On a  $\begin{cases} h(M) = N \\ h(A) = C \end{cases}$  alors  $\overline{NC} = -\frac{5}{3}\overline{MA}$

$$h(A) = C$$

Or  $(AM) \parallel (DN)$  et  $(MN) \parallel (AD)$  alors AMN est un parallélogramme alors  $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{ND}$  alors  $\overrightarrow{NC} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{ND}$

## 7

## S'ENTRAINER



1) Dans le triangle DMH on a :

$$C \in (DH), B \in (DM) \text{ et } (CB) \parallel (HM)$$

$$\text{Or } \overrightarrow{DM} = \frac{3}{2} \overrightarrow{DB}$$

alors d'après la forme vectorielle de théorème de

Thalès on a  $\overrightarrow{DH} = \frac{3}{2} \overrightarrow{DC}$

$$2) \quad * \overrightarrow{DM} = \frac{3}{2} \overrightarrow{DB} \quad \text{alors} \quad h(B) = M$$

$$* \overrightarrow{DH} = \frac{3}{2} \overrightarrow{DC} \quad \text{alors} \quad h(C) = H$$

\* Dans le triangle DKM on a :

$$A \in (DK), \quad B \in (DM) \quad (AB) \parallel (KM)$$

or  $\overrightarrow{DM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$  alors d'après la forme

vectorielle de théorème de Thalès on a :

$$\overrightarrow{DK} = \frac{3}{2} \overrightarrow{DA} \quad \text{alors} \quad h(A) = K$$

3) On a  $h(ABCD) = MHDK$

Or ABCD est rectangle alors MHDK est un rectangle car une homothétie conserve le Parallélisme et l'orthogonalité.

- Périmètre (MHDK) =  $|k|$

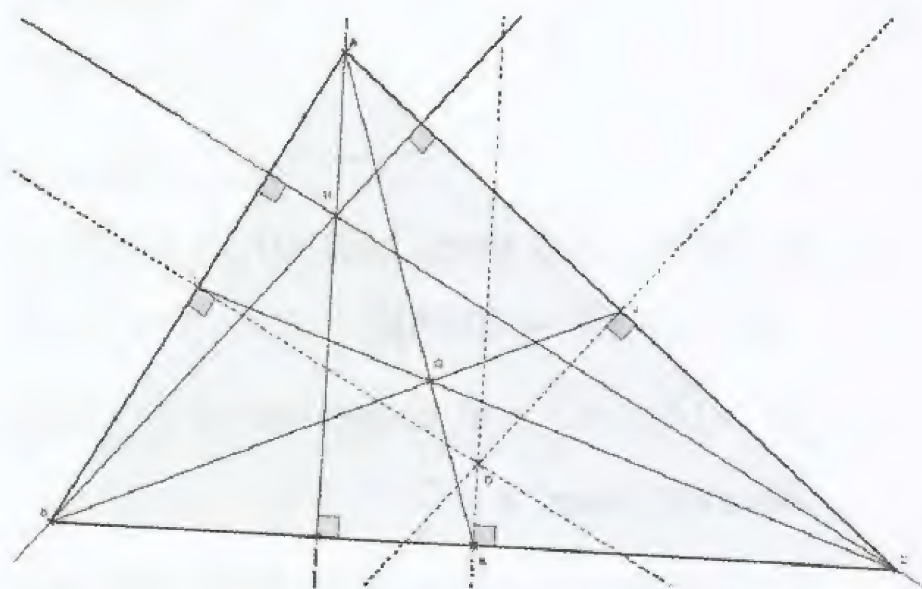
$$\text{Périmètre (ABCD)} = \frac{3}{2} \times 14 = 21$$

- Aire (MHDK) =  $k^2$

$$\text{Aire (ABCD)} = \frac{9}{4} \times 12 = 27$$

## 8

## S'ENTRAÎNER



1) On a  $\overrightarrow{GK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$  alors  $h(A) = K$

- On a :  $\overrightarrow{GJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$  alors  $h(B) = J$

- On a :  $\overrightarrow{GJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$  alors  $h(C) = I$

2) a)  $h((AH))$  est la droite passant par  $h(A) = K$  et parallèle à

$$(AH) \text{ alors } h((AH)) = (OK)$$

$h((BH))$  est la droite passant par  $h(B) = J$  et parallèle à  $(BH)$  alors  $h((BH)) = (OJ)$

a) On a

$$\begin{aligned} H \in (AH) \cap (BH) &\Rightarrow h(H) \in h((AH)) \cap h((BH)) \\ &\in (OK) \cap (OJ) \end{aligned}$$

$$\in \{0\}$$

Alors  $h(H) = 0$

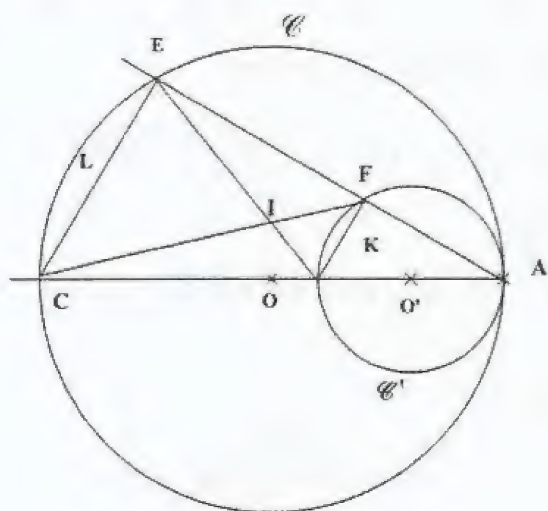
Or  $G$  est le centre de  $h$  alors  $O$ ,  $G$  et  $H$  sont alignés.



# 9 S'ENTRAINER

les cercles  $\mathcal{C}(O, 5)$  et  $\mathcal{C}'(O', 2)$ .  
 $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont tangents intérieurement en A. la droite  $(OO')$  recoupe  $\mathcal{C}$  en C et  $\mathcal{C}'$  en B

1) Figure



2)  $h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$  alors  $h(O) = O'$  et  $r' = |k| r$  d'où  
 $\overrightarrow{AO'} = k \overrightarrow{AO}$  et  $2 = 5|k|$

or  $\overrightarrow{AO'}$  et  $\overrightarrow{AO}$  sont colinéaires et de même sens  
 alors  $k > 0$  alors  $k = \frac{2}{5}$

3) E un point variable de  $\mathcal{C}$  distincts de A et C, la droite (AE) recoupe  $\mathcal{C}'$  en F.

a)  $h(E) = F$  ?

On a  $E \in \mathcal{C} \cap (AE)$  alors  $h(E) \in h(\mathcal{C}) \cap h((AE))$

alors  $h(C) \in \mathcal{C}' \cap (AE)$

$\in \{A, F\}$

Or  $h(A) = A$  et  $A \neq E$  alors  $h(E) \neq A$

Alors  $h(E) = F$

b) On a  $C \in \mathcal{C} \cap (AC)$

alors  $h(C) \in h(\mathcal{C}) \cap h((AC))$

$\in \mathcal{C}' \cap (AC)$

$\in \{A, B\}$

Or  $h(A) = A$  et  $C \neq A$  alors  $h(C) \neq A$  d'où  $h(C) = B$

Conclusion :  $h(C) = B$  et  $h(E) = F$  alors  $(EC) \parallel (FB)$

c) \*  $h(C) = B$  et  $h(E) = F$  alors  $BF = |k| EC$  alors

alors  $|k| = \frac{BF}{EC} = \frac{2}{5}$  alors  $k = \frac{2}{5}$

\* On a l'image du triangle AEC par h est le triangle ABF alors  $Aire(ABF) = k^2 Aire(AEC)$

Alors  $\frac{Aire(AEC)}{Aire(ABF)} = \frac{1}{k^2} = \frac{25}{4}$

4) a) Montrons que  $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{7} \overrightarrow{BE}$

Dans le triangle IEC on a :  $F \in (IC)$ ,  $B \in (IE)$  et  $(EC) \parallel (BF)$

D'après le théorème de Thalès on a

$\frac{IB}{IE} = \frac{BF}{EC}$  alors  $\frac{IB}{IE} = \frac{2}{5}$  d'où  $IB = \frac{2}{5} IE$

alors  $IB = \frac{2}{5} (BE - IB)$  alors  $BI = \frac{2}{7} BE$

On a les vecteurs  $\overrightarrow{BI}$  et  $\frac{2}{7} \overrightarrow{BE}$  sont colinéaires et

de même sens et  $BI = \frac{2}{7} BE$  alors  $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{7} \overrightarrow{BE}$

alors  $h'(E) = I$

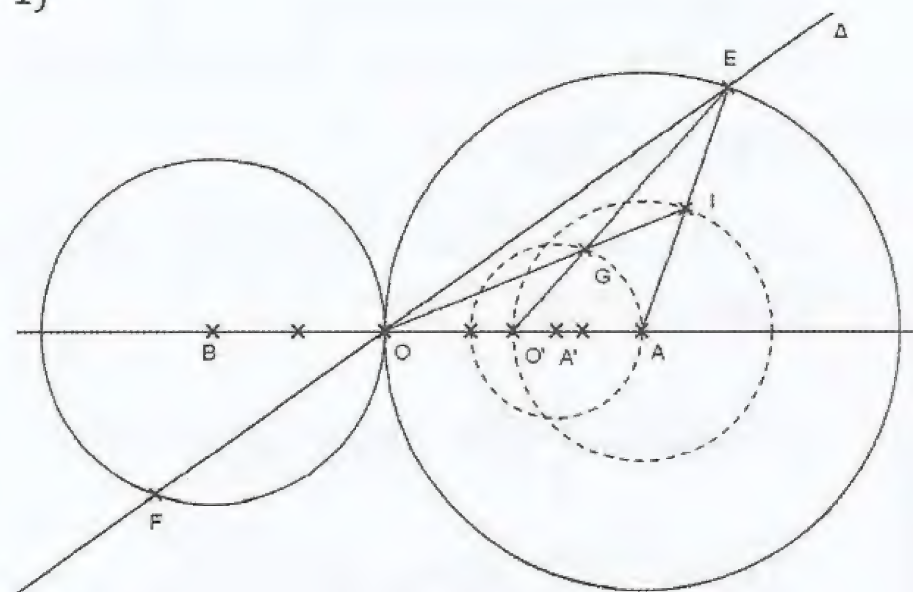
b) On a E varie sur le cercle  $\mathcal{C}$  privé de A et C alors I varie sur  $h'(\mathcal{C})$  privée de  $h'(\mathcal{C})$  et  $h'(A)$  avec  $h'(\mathcal{C})$  est le cercle de centre  $h'(O)$  et de rayon  $\frac{2}{7} \times 5 = \frac{10}{7}$

5) K le milieu de [BF] et L le milieu de [EC].

On a :  $L = C * E$  alors  $h(L) = h(C) * h(E)$  alors  $h(L) = B * F$  alors  $h(L) = K$  comme A est le centre de h alors A, K et L sont alignés.

# 10 S'ENTRAINER

1)



$\zeta(A, 3)$ ,  $\zeta'(B, 2)$

$AB = 5$  et  $r + r' = 3 + 2 = 5$  d'où  $AB = r + r'$

Alors les deux cercles  $\zeta$  et  $\zeta'$  sont tangents extérieurement en O.

2/  $h(\zeta) = \zeta'$  alors  $h(A) = B$  alors  $\overrightarrow{OB} = k \overrightarrow{OA}$

alors  $OB = |k| OA$  alors  $|k| = \frac{OB}{OA}$





Or  $\overrightarrow{OB}$  et  $\overrightarrow{OA}$  sont de sens contraires alors

$$k < 0 \Rightarrow k = -\frac{OB}{OA} = -\frac{2}{3}$$

3) On a :  $\{E\} \in \zeta \cap (OE)$

alors  $h(E) \in h(\zeta) \cap h((OE))$

alors  $h(E) \in \zeta' \cap (OE) = \{O, F\}$

alors  $h(E) \in \{O, F\}$  alors  $h(E) = O$  où  $h(E) = F$

Or  $h(O) = O$  alors  $h(E) = F$ .

4) a) On a :  $AI = \frac{1}{2} AF = \frac{3}{2}$

Lorsque  $\Delta$  varie, le point  $I$  varie sur le cercle

$$\zeta''\left(A, \frac{3}{2}\right)$$

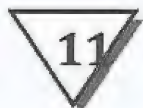
b) On a :  $G$  est le cercle de gravité de  $OAE$  et  $O' = O * A$

Alors  $\overrightarrow{O'G} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OE}$  alors  $h_{\left(O', \frac{1}{3}\right)}(E) = G$

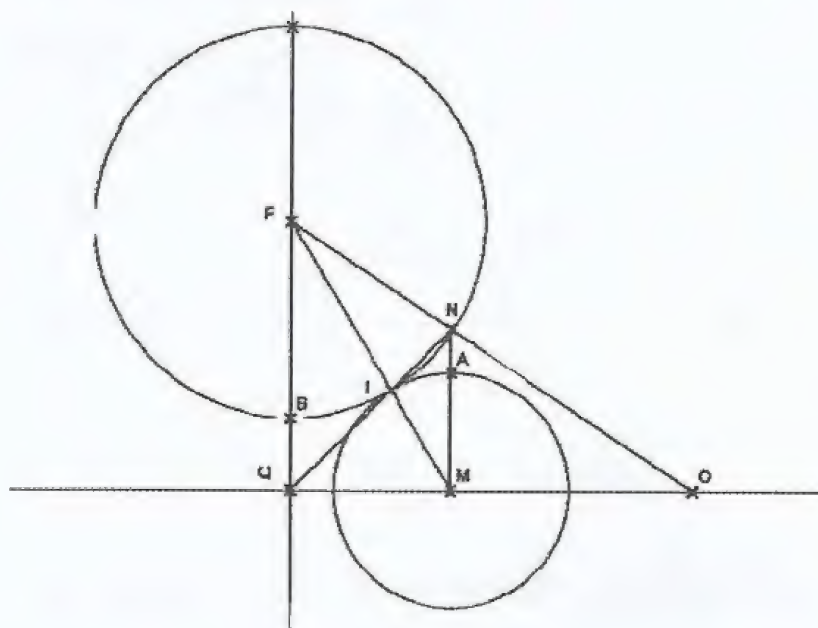
On a  $E$  varie sur  $\zeta(A, 3)$  alors  $G$  varie le cercle

$\zeta_1(A', 1)$  l'image de  $\zeta$  par  $h_{\left(O', \frac{1}{3}\right)}$ .

où  $A' = h_{\left(O', \frac{1}{3}\right)}(A)$



### S'ENTRAINER



1) On a  $(MN) \perp (OM)$  } Alors  $(MN) \parallel (PQ)$   
 $(PQ) \perp (OM)$

2)a) L'image de la droite  $(MN)$  par  $h$  est la droite passant par  $h(N) = P$  et parallèle par  $(MN)$  d'où

$$h((MN)) = (PQ)$$

b) on a :  $M \in (OM) \cap (MN)$  alors :

$$h(M) \in h((OM)) \cap h((MN))$$

$$\in (OM) \cap (QP) \in \{Q\} \text{ D'où } h(M) = Q$$

#### 2<sup>ème</sup> Méthode :

Dans le triangle  $OPQ$  on a :

$$\begin{cases} M \in (OQ) \\ N \in (OP) \\ (MN) \parallel (PQ) \end{cases}$$

$$\text{On a } \overrightarrow{OP} = \frac{5}{3} \overrightarrow{ON}$$

Alors d'après la forme vectorielle de théorème de Thalès on a :  $\overrightarrow{OQ} = \frac{5}{3} \overrightarrow{OM}$  D'où  $h(M) = Q$

$$2) * \text{ On a } \overrightarrow{OQ} = \frac{5}{3} \overrightarrow{OM} \text{ alors } OQ = \frac{5}{3} OM = \frac{5}{3} \times 4,5 = 7,5$$

$$* h(M) = Q \text{ et } h(N) = P$$

$$\text{alors } PQ = \frac{5}{3} MN = \frac{5}{3} \times 3 = 5$$

$$3/ h'(M) = P \text{ alors } I \in (MP)$$

$$h'(N) = Q \text{ alors } I \in (NQ)$$

$$\text{Donc } \{I\} = (MP) \cap (NQ)$$

$$\left. \begin{array}{l} h'(M) = P \\ h(N) = Q \end{array} \right\} \text{ alors } \overrightarrow{PQ} = k \overrightarrow{MN}$$

$$\text{Or } h(M) = Q \text{ et } h(N) = P$$

$$\text{alors } \overrightarrow{QP} = \frac{5}{3} \overrightarrow{MN} \text{ alors } \overrightarrow{PQ} = -\frac{5}{3} \overrightarrow{MN}$$

$$\text{Donc } k = -\frac{5}{3}$$

$$4) \zeta(I, IM) \quad \zeta'(P, JP)$$

On a  $\zeta$  de centre  $M$  et passant par  $I$  donc  $h'(\zeta)$

est le cercle de centre  $h'(M) = P$  et passant par

$$h'(I) = I \text{ alors } h'(\zeta) = \zeta'$$

$$b) \text{ On a : } A \in [MN] \cap \zeta$$

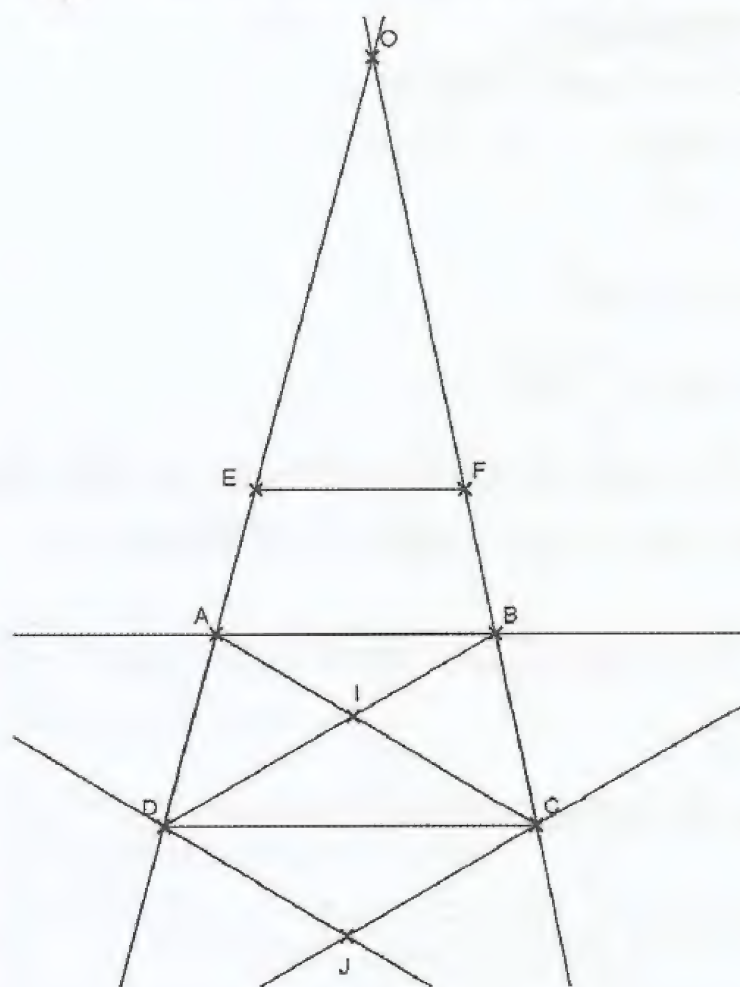


donc  $h'(A) \in h'([MN]) \cap h'(\zeta)$

donc  $h'(A) \in [PQ] \cap \zeta' \in \{B\}$

Donc  $h'(A) = B$  or I centre de  $h'$  alors I, A et B sont alignés.

## 12 SE PERFECTIONNER



1) Si  $h'(A) = B$  et  $h'(D) = C$  alors  $(AD) \parallel (BC)$

Impossible car  $(AD)$  et  $(BC)$  sont sécantes d'où  $h'$  n'existe pas.

2)a)  $h(D) = A$  alors  $O \in (AD)$

$h(C) = B$  alors  $O \in (BC)$

Alors  $O \in (AD) \cap (BC)$

b)  $h(D) = A$  alors  $\overline{AB} = k\overline{DC}$   
 $h(C) = B$

On a :  $\overline{AB} = \frac{3}{4}\overline{DC}$

Alors  $k = \frac{3}{4}$

c)

d) On a :  $h(A) = E$  et  $h(B) = F$

On a :  $h(ABCD) = EFBA$

Alors :  $Aire(EFBA) = k^2 Aire(ABCD)$

Alors :  $Aire(EFBA) = \frac{9}{16} Aire(ABCD)$

3) On a :  $J \in (JC) \cap (JD)$

Alors :  $h(J) \in h((JC)) \cap h((JD))$

\*  $h((JC))$  est la droite parallèle à  $(JC)$  et passant par  $h(C) = B$  Alors :  $h((JC)) = (DB)$

\*  $h((JD))$  est la droite parallèle à  $(JD)$  et passant par  $h(D) = A$

Alors :  $h((JD)) = (AC)$

D'où :  $h(J) \in (DB) \cap (AC)$

$\in \{I\}$  D'où  $h(J) = I$

Comme O est le centre de h

Alors O, I, J sont alignés.

4)  $\overline{DM} = \frac{x^2}{2x^2+1} \overline{DC}$  alors  $M \in [DC]$  car  $\frac{x^2}{2x^2+1} \in [0,1]$

On a :  $M \in (OM) \cap (DC)$

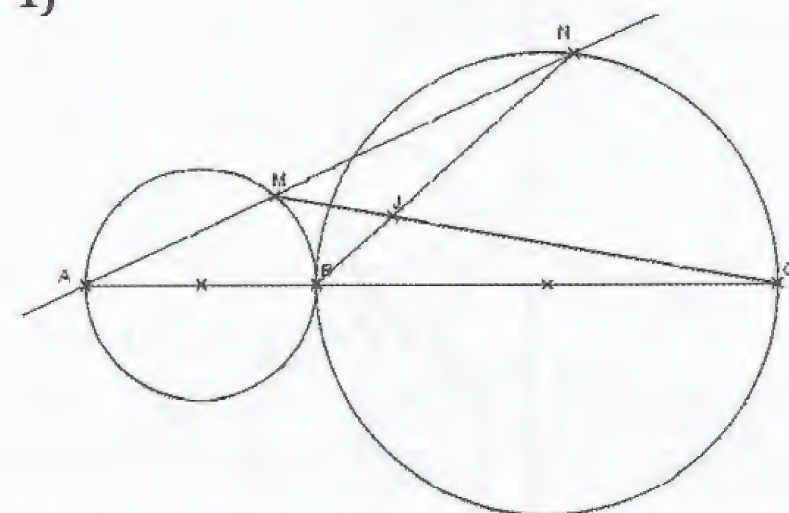
Alors  $h(M) \in h((OM)) \cap h((DC))$

$\in (OM) \cap (AB)$

$\in \{N\}$  Alors  $h(M) = N$

## 13 SE PERFECTIONNER

1)



2)\* Soit I le centre de h On a  $h(B) = N$  alors

$I \in (BN)$

$h(M) = C$  alors  $I \in (MC)$

Alors  $\{I\} = (BN) \cap (MC)$

D'où  $J = I$



\*Soit  $k$  le rapport de  $h$

$$\left. \begin{array}{l} h(B) = N \\ h(M) = C \end{array} \right\} \text{ alors } (CN) // (MB), \text{ et } \overrightarrow{CN} = k \overrightarrow{MB}$$

Dans le triangle  $ANC$  on a :  $M \in (AN)$ ,  $B \in (AC)$  et  $(CN) // (MB)$ ,

D'après le théorème de Thalès  $\frac{AB}{AC} = \frac{MB}{CN}$  D'où

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{|k|} \Rightarrow \text{alors } |k| = 3$$

Or  $\overrightarrow{CN} = k \overrightarrow{MB}$  et  $\overrightarrow{CN}$  et  $\overrightarrow{MB}$  sont de sens contraires alors  $k < 0$  d'où  $k = -3$ .

3/ On a :  $h(B) = N$  alors  $\overrightarrow{JN} = -3 \overrightarrow{JB}$  alors

$$\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BN} = -3 \overrightarrow{JB} \text{ alors } \overrightarrow{BN} = -4 \overrightarrow{JB}$$

$$\text{alors } \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BN}$$

D'où  $h'$  est l'homothétie de centre  $B$  et de rapport

$$k = \frac{1}{4}$$

#### 14 SE PERFECTIONNER

Soit  $I = O * A$

on a  $I$  est un point fixe

$$\text{On a } \overrightarrow{IG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{IM} \text{ alors : } h_{\left(\frac{1}{3}\right)}(M) = G$$

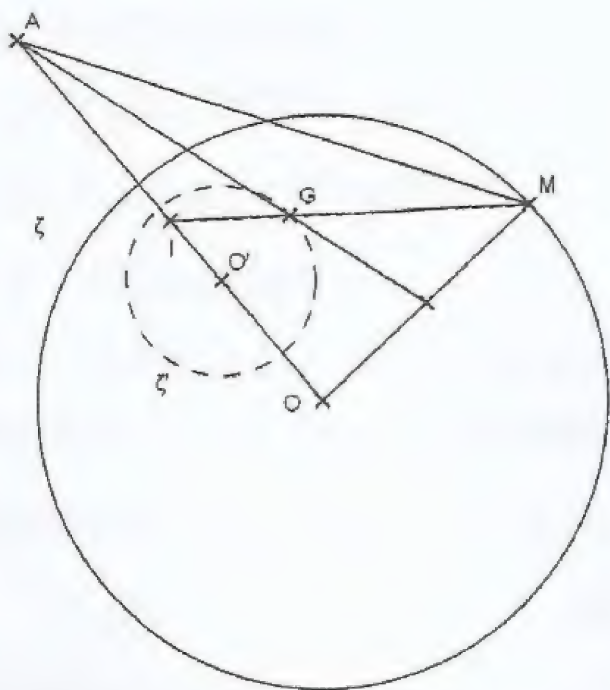
On a  $M$  varie sur  $\zeta$

alors  $h(M)$  varie sur  $h(\zeta)$

alors  $G$  varie sur  $\zeta' = h(\zeta)$

$\zeta'$  est le cercle de centre  $O' = h(O)$  et de rayon

$$\frac{1}{3} \times 3 = 1$$



#### 15 SE PERFECTIONNER

$$M \in D, N \in \Delta$$

$$\text{On a } 3 \overrightarrow{AM} + 8 \overrightarrow{NA} = \vec{0} \text{ alors } \overrightarrow{AM} = \frac{8}{3} \overrightarrow{AN}$$

alors :

$$h_{\left(A, \frac{8}{3}\right)}(M) = N$$

On a :  $M \in D$  alors  $h(M) \in h(D)$  alors  $N \in h(D)$

alors  $N \in D'$  où  $D' = h(D)$

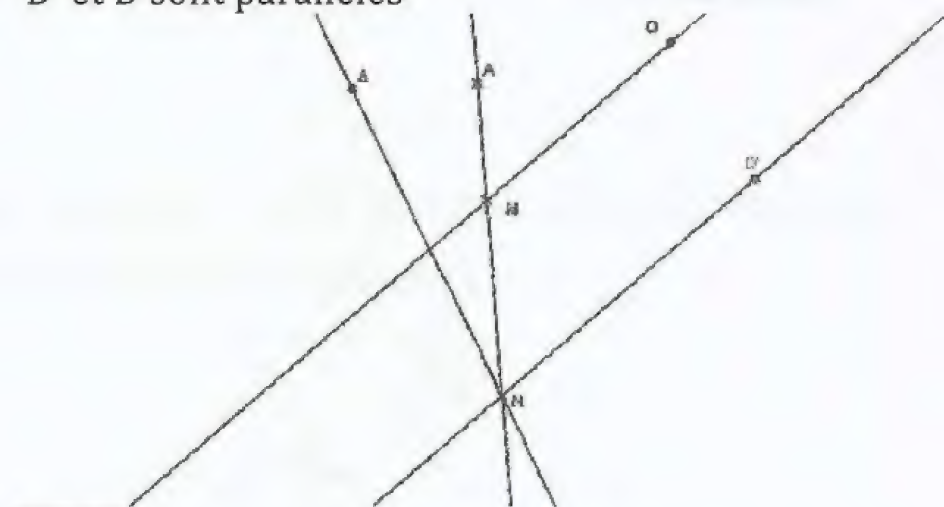
D'autre part  $N \in \Delta$  alors  $N \in \Delta \cap D'$

**Construction :**

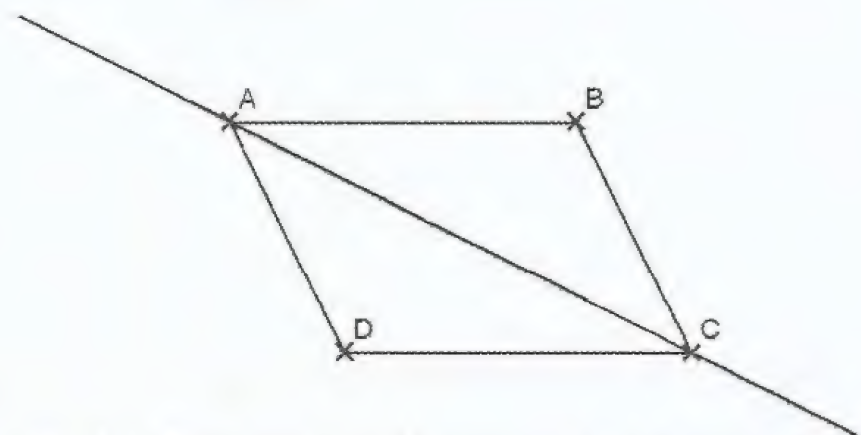
- On construit  $D' = h(D)$
- $D'$  coupe  $\Delta$  en  $N$
- On construit la droite  $(AN)$  qui coupe  $D$  en  $M$

**Remarque :**

$D'$  et  $\Delta$  sont sécantes car  $\Delta$  et  $D$  sont sécantes et  $D'$  et  $D$  sont parallèles



#### 16 SE PERFECTIONNER



- Si  $I \in E$  alors  $I$  est le centre d'une homothétie  $h$  tel que  $h((AB)) = (CD)$  et  $h((AD)) = (BC)$

On a

$$A \in (AB) \cap (AD) \text{ alors } h(A) \in h((AB)) \cap h((AD))$$



Alors  $h(A) \in (CD) \cap (BC)$

Alors  $h(A) \in \{C\}$

Alors  $h(A) = C$  alors  $I \in (AC)$

On a  $I \neq A$  et  $I \neq C$  car si non  $h((AB)) \neq (CD)$

Alors  $E$  est la droite  $(AC)$  privée de  $A$  et  $C$ .

• Réciproquement soit  $M'$  est un point de  $(AC)$  privée de  $A$  et  $C$ .

Montrons que  $I$  est le centre d'une homothétie  $h$  tel que  $h((AB)) = (CD)$  et  $h((AD)) = (BC)$

Soit l'homothétie  $h$  de centre  $I$  et tel que  $h(A) = C$

\* On a  $h((AB))$  est la droite passant par  $h(A) = C$  et parallèle à  $(AB)$  alors  $h((AB)) = (AC)$

\* On a  $h((AD))$  est la droite passant par  $h(A) = C$  et parallèle à  $(AD)$

alors  $h((AD)) = (BC)$

d'où la droite  $(AC)$  privée de  $A$  et  $C$  est incluse dans  $E$ .

**Conclusion:**  $E$  est la droite  $(AC)$  privée de  $A$  et  $C$



## Rotation

### 1) Résumé du cours

#### A) Le radian :

Le radian est une unité des angles on a :  $180^\circ = \pi \text{ rad}$

Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont les mesures d'un même angle respectivement en degré et en radian

$$\text{alors } \frac{\alpha}{180} = \frac{\beta}{\pi}$$

#### B) Définition d'une rotation:

##### 1) Définition :

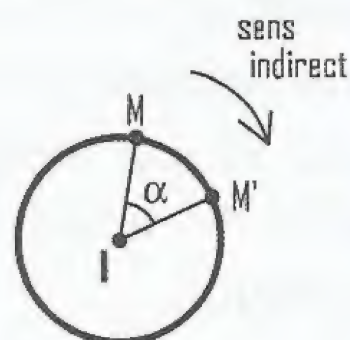
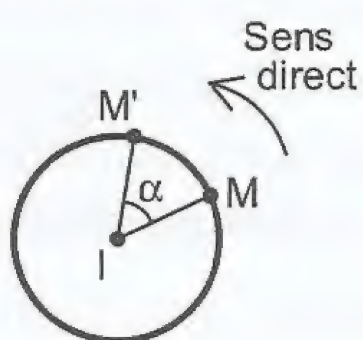
Soient  $I$  un point du plan et  $\alpha$  un réel donné de  $[0, \pi]$ . L'application  $r$  de  $P$  dans  $P$  tel que :

$$*r(I) = I$$

\* Pour tout point  $M$  de  $P \setminus \{I\}$   $r(M) = M'$  signifie  $IM = IM'$  et  $\widehat{MIM'} = \alpha$  est appelée la rotation de centre  $I$  d'angle  $\alpha$ .

Elle est notée  $r_{(I, \alpha)}$ .

Il s'agit d'une rotation directe de centre  $I$  et d'angle  $\alpha$  si le sens de parcours est direct et d'une rotation indirecte si le sens de parcours est indirect



##### 2) Cas particuliers :

$r_{(I, 0)}$  est l'identité du plan =  $\text{Id}_P$

$r_{(I, \pi)}$  est la symétrie centrale  $S_I$ .

#### C) Propriétés :

◆ **Propriété 1 :** Le centre d'une rotation d'angle non nul est le seul point invariant.

◆ **Propriété 2 :** Toute rotation  $r_{(I, \alpha)}$  de  $P$  est une bijection de  $P$  sur lui-même et son application réciproque est la rotation  $r_{(I, -\alpha)}$ .

$$r_{(I, \alpha)}(M) = M' \text{ signifie } r_{(I, -\alpha)}(M') = M$$

◆ **Propriété 3:** Toute rotation du plan conserve les distances.

◆ **Propriété 4:** Toute rotation conserve les écarts angulaires



Si  $r(A)=A'$ ,  $r(B)=B'$  et  $r(C)=C'$  on a  $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$

♦ **Propriété 5:** Toute rotation du plan conserve l'alignement, les milieux, les barycentres

**Remarque :**

Si  $r_{(I,\alpha)}(M) = M'$  alors  $IM = IM'$  alors le centre  $I$  de  $r$  appartient à la médiatrice de  $[MM']$

### D) Images de figures simples par une rotation :

Une rotation  $r$  du plan transforme :

- Une droite en une droite.  
(Si  $D$  une droite et  $A$  et  $B$  deux points distincts de  $D$ . L'image de la droite  $D$  par une rotation  $r$  est la droite  $(A'B')$  ; où  $A' = r(A)$  et  $B' = r(B)$ )
- Un segment  $[AB]$  en un segment  $[A'B']$  avec  $A' = r(A)$  et  $B' = r(B)$ .
- Une demi-droite en une demi-droite.
- Un cercle en un cercle qui lui est isométrique.

**Remarques :**

- Si l'angle de la rotation est  $\frac{\pi}{2}$  alors l'image d'une droite est une droite qui lui est perpendiculaire
- Les images de deux parallèles par une rotation sont deux droites parallèles.
- Les images de deux perpendiculaires par une rotation sont deux droites perpendiculaires.
- On dit qu'une rotation conserve le parallélisme et l'orthogonalité.
- Un polygone et son image par une rotation sont isométriques ou encore superposables. Il ont alors le même aire, le même périmètre et leurs angles sont isométriques.

## II) Exercices

### 1/ APPLIQUER

Soit  $ABC$  un triangle rectangle et isocèle en  $A$  et direct. On pose  $I = B * C$

Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de diamètre  $[AB]$  et  $\mathcal{C}'$  le cercle de diamètre  $[AC]$ .

Soit  $r$  la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

- 1) Montrer que  $\mathcal{C}' = r(\mathcal{C})$ .
- 2) Montrer que  $I \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$
- 3) La droite  $\Delta$  passant par  $A$  et perpendiculaire à la droite  $(AI)$  recoupe  $\mathcal{C}$  en  $M$ . Montrer que  $r(M) = I$ .

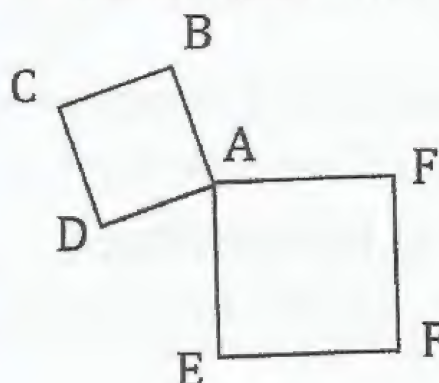


## 2/ APPLIQUER

$ABC$  est un triangle de sens direct. On construit à l'extérieurs de  $ABC$  les points  $M$  et  $N$  tels que  $AMB$  et  $ANC$  soit équilatéraux. Démontrer que  $MC = NB$ .

## 3/ APPLIQUER

$ABCD$  et  $AEFG$  sont deux carrés directs  
Montrer que  $EB = DG$  et  $(EB) \perp (DG)$   
(On pourra considérer une rotation)



## 4/ APPLIQUER

Soit  $ABCD$  un carré de centre  $O$  de sens direct. Soient  $I$  le symétrique de  $A$  par rapport à  $B$  et  $J$  le symétrique de  $D$  par rapport à  $A$ . Soit  $r$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$

- 1) Déterminer  $r(D)$  et  $r(A)$ .
- 2) Démontrer que  $OIJ$  est un triangle rectangle isocèle en  $O$ .

## 5/ APPLIQUER

Soit  $ABC$  un triangle direct et isocèle en  $B$

- 1) Déterminer le centre  $I$  de la rotation direct  $r$  tel que  $r(A) = B$  et  $r(B) = C$ .
- 2) Soit  $M$  un point de  $[AB]$  et  $N$  le point de  $[BC]$  tel que  $AM = BN$  Montrer que  $r(M) = N$

## 6/ APPLIQUER

Soit  $A$  et  $B$  deux points du plan

Déterminer le centre  $I$  de la rotation direct  $r$  d'angle  $\frac{\pi}{3}$  tel que  $r(A) = B$ .

## 7/ APPLIQUER

Soit  $[BC]$  un segment du plan et soit  $r$  la rotation indirect de centre  $C$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$

- 1) Construire  $A$  l'image de  $B$  par  $r$
- 2) Soit  $\mathcal{C}$  le cercle circonscrit au triangle  $ABC$  et soit  $M$  un point de l'arc  $\widehat{BC}$  ne contenant pas  $A$  et distinct de  $B$  et  $C$ . Soit  $D \in [MA]$  tel que  $MD = MC$ 
  - a) Déterminer  $r(C)$ .
  - b) Montrer que  $r(M) = D$
  - c) Montrer que  $MA = MB + MC$



## 8 S'ENTRAINER

Soit ABCD un carré et direct

Soit  $r$  la rotation directe de centre C et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

- 1) a) Construire les points E et F images respectives de D et B par la rotation  $r$   
b) Construire le point G tel que  $r(G) = A$
- 2) a) Montrer que B, D et G sont alignés  
b) En déduire que A, E et F sont alignés.

## 9 S'ENTRAINER

Soit D et  $\Delta$  deux droites strictement parallèles du plan orienté. et soit A un point qui n'appartient ni à D ni à  $\Delta$ . Construire un triangle ABC rectangle isocèle en A de sens direct tel que  $B \in D$  et  $C \in \Delta$ .

## 10 S'ENTRAINER

Soit ABC un triangle direct et M un point variable de [BC] et AMP un triangle équilatéral direct

- 1) Faire une figure
- 2) Quel est l'ensemble des points P lorsque M varie ?

## 11 S'ENTRAINER

ABCD est un carré indirect. E milieu de [CD] et  $(AE) \cap (CB) = \{F\}$ . La perpendiculaire  $\Delta$  à (AE) en A coupe (CD) en G et (CB) en H. On considère le quart de tour direct  $r$  de centre A.

- 1) Déterminer  $r(D)$ ,  $r((DC))$  et  $r(\Delta)$
- 2) Montrer que  $r(G) = F$
- 3) Montrer que le triangle AEH est rectangle isocèle
- 4) Que représente E pour le triangle HFG

## 12 S'ENTRAINER

ABC un triangle rectangle en A de sens direct tel que  $AB = 5$ ,  $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{6}$  et  $\mathcal{C}$  son cercle circonscrit de centre O. La médiatrice  $\Delta$  de [AC] coupe l'arc  $\widehat{BC}$  ne contenant pas

A en un point I. On désigne par  $R$  la rotation indirecte de centre I et d'angle  $\frac{\pi}{6}$



1) Montrer que  $R(A) = C$  puis construire  $C' = R(C)$

2) a) Montrer que  $\widehat{C'CI} = \widehat{CAI}$

b) En déduire que  $(CC') \perp (BC)$

3) Déterminer  $r((AC))$  et en déduire  $r((AB))$

### 13 S'ENTRAÎNER

ABCD un carré direct, on désigne par E le point de  $[DB]$  tel que  $DE = DA$ . On note I et J les milieux respectifs de  $[AE]$  et  $[CE]$ . Soit R la rotation directe de centre D et

d'angle  $\frac{\pi}{4}$

1) Déterminer  $R(A), R(E)$  et  $R(I)$

2) Montrer que le triangle EIJ est isocèle

3) Construire le point  $F = R(B)$  et montrer que  $(DE) \perp (EF)$ .

### 14 SEPERFECTIONNER

Soit ABC un triangle rectangle en A de sens direct et tel que  $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{6}$ . On construit à

l'extérieur du triangle ABC les triangles équilatéraux ABI et BCJ. Soit K le milieu de

$[CJ]$ . On note R la rotation directe de centre B et d'angle  $\frac{\pi}{3}$

1) Déterminer  $R(A)$  et  $R(J)$

2) Montrer que  $R(K) = A$

3) Soit  $\mathcal{C}_1$  le cercle de centre J et passant par K et  $\mathcal{C}_2$  le cercle de centre C et passant par K

Montrer que  $R(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$

### 15 SEPERFECTIONNER

Soit ABC un triangle équilatéral inscrit dans un cercle  $\mathcal{C}$  de centre O,  $I = A*B$  et  $J =$

$B*C$  Soit r la rotation de centre O et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ .

1) Montrer que  $r(A) = B$

2) Déterminer  $r(B)$  et en déduire  $r((AB))$

3) Montrer que  $r(I) = J$

4) Déterminer  $r(C)$





- 5) A l'extérieur de ce triangle On construit un triangle équilatéral direct ACD
- Déterminer  $r(C)$ .
  - En déduire  $r((CD))$



### SEPERFECTIONNER

On considère un triangle équilatéral ABC de sens direct et  $D = S_{(AC)}(B)$ .

Soit  $r$  la rotation d'angle  $\frac{\pi}{3}$  tel que :  $r(A) = C$ .

1)

a) Montrer que D est le centre de  $r$ .

b) Soit  $B' = r(B)$ , montrer que le point C est le milieu du segment  $[AB']$ .

2) Soit M un point de la demi-droite  $[AB)$  et  $M'$  le point de  $[CB')$  tel que  $AM = CM'$ .

Montrer que le triangle  $AMM'$  est équilatéral.







Soit  $r$  la rotation directe de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$

- 1) On a  $\begin{cases} AD = OA \\ \widehat{DOA} = \frac{\pi}{2} \text{ dans la sens directe} \end{cases}$  alors  $r(D) = A$
- On a  $\begin{cases} OA = OB \\ \widehat{AOB} = \frac{\pi}{2} \text{ dans la sens directe} \end{cases}$  alors  $r(A) = B$

2) Il suffit de montrer que  $r(J) = (I)$

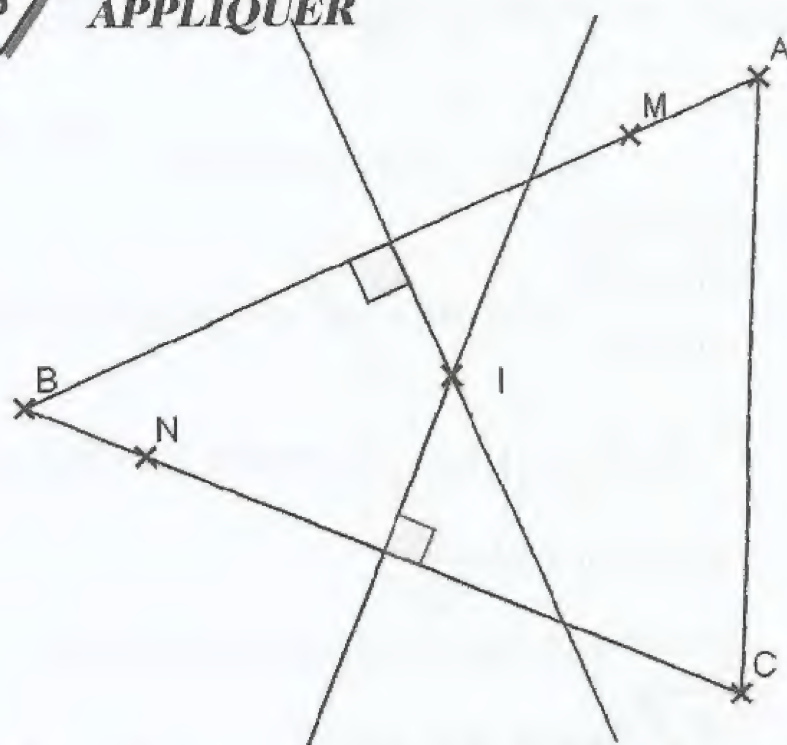
On a  $A = D * J$  alors  $r(A) = r(D) * r(J)$  car  $r$  conserve le milieu. Alors  $B = A * r(J)$

or  $B = A * I$  alors  $r(J) = I$

On a  $r(J) = I$  alors  $OI = OJ$  et  $\widehat{JOI} = \frac{\pi}{2}$

D'où  $OIJ$  est un triangle rectangle et isocèle en  $O$

### 5 APPLIQUER



$r(A) = B$  alors  $IA = IB$  alors  $I \in \Delta$  avec  $\Delta$  est la médiatrice de  $[AB]$

$r(B) = C$  alors  $IA = IB$  alors  $I \in \Delta'$  avec  $\Delta'$  est la médiatrice de  $[BC]$

d'où  $\{I\} = \Delta \cap \Delta'$

1) On pose  $r(M) = M'$ , montrons que  $M' = N$

On a  $M \in [AB]$  alors  $r(M) \in r([AB])$  alors  $M' \in [BC]$

On a  $\begin{cases} r(A) = B \\ r(M) = M' \end{cases}$  alors  $AM = BM'$

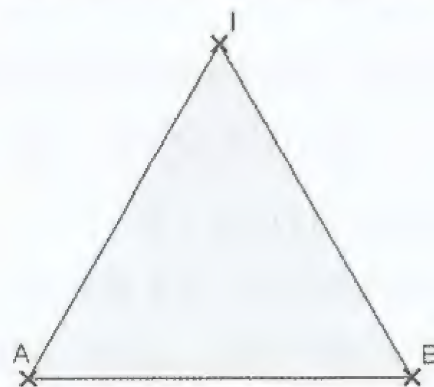
Or  $AM = BN$  alors  $BM' = BN$

Conclusion  $\begin{cases} M' \in [BC] \\ N \in [BC] \\ BM = BN \end{cases}$  alors  $M' = N$  d'où  $r(M) = N$

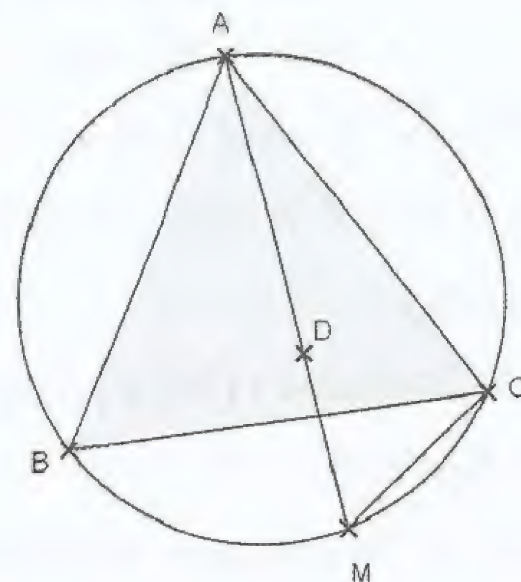
### 6 APPLIQUER

On a  $r(A) = B$  alors  $\begin{cases} IA = IB \\ \widehat{AIB} = \frac{\pi}{3} \text{ dans la sens directe} \end{cases}$

Alors  $IAB$  est un triangle équilatéral direct



### 7 APPLIQUER



1)  $r(B) = A$  alors  $CA = CB$  et  $\widehat{BCA} = \frac{\pi}{3}$  dans le sens indirect.

2) a)  $r(C) = C$  (car  $C$  est le centre de  $r$ )

b) \* on a  $MC = MD$

\* on a  $\widehat{CMD} = \widehat{CMA} = \widehat{CBA} = \frac{\pi}{3}$

(deux angles inscrit dans  $\zeta$  qui interceptent le même arc  $[CA]$ )

D'où  $MCD$  est un triangle équilatéral



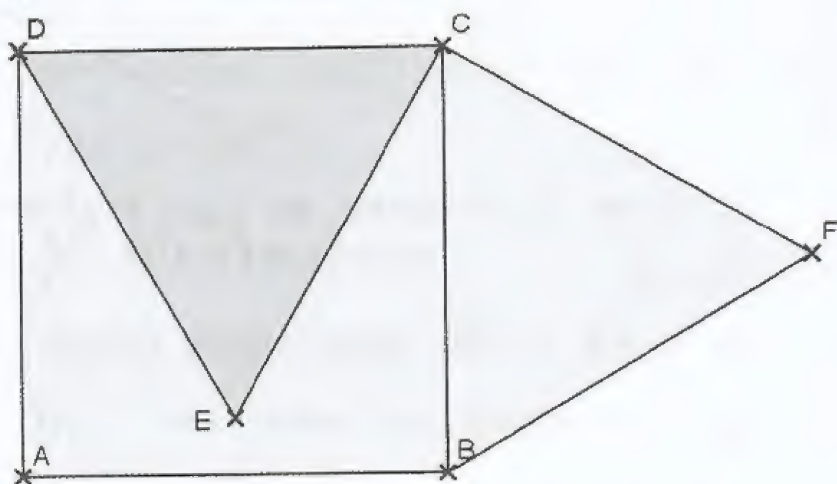
On a  $\begin{cases} CM = CD \\ \widehat{MCD} = \frac{\pi}{3} \text{ dans le sens indirect} \end{cases}$  alors  $r(M) = D$

c) On a  $\triangle CMD$  est un triangle équilatéral alors  $MC = MD$

on a  $\begin{cases} r(M) = D \\ r(B) = A \end{cases}$  alors  $BM = AD$

d'où  $MB + MC = AD + MD$   
 $= MA$  (car  $D \in [AM]$ )

### 8 S'ENTRAINER



1) a)  $r(D) = E$  ;  $r(B) = F$

b)  $r(G) = A$

2) a)  $r(G) = A$  alors  $CG = CA$  et  $\widehat{GCA} = \frac{\pi}{3}$

car dans le sens direct

alors  $\triangle ACG$  est un triangle équilatéral

alors  $GA = GC$

alors  $G$  appartient à la médiatrice de  $[AC]$

alors  $G \in (BD)$

alors  $B, D$  et  $G$  sont alignés

b) On a :

$\begin{cases} r(D) = E \\ r(B) = F \\ r(G) = A \end{cases}$   
 $D, B$  et  $G$  sont alignés

Alors  $E, F$  et  $A$  sont alignés.

### 9 S'ENTRAINER

$B \in D, C \in \Delta$

Soit  $r$  la rotation direct de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$   
 on a  $\triangle ABC$  est un triangle rectangle isocèle en  $A$  et direct alors  $r(B) = C$

• on a  $B \in D$  alors  $r(B) \in r(D)$  alors  $C \in r(D)$

soit  $D' = r(D)$  alors  $C \in \Delta \cap D'$

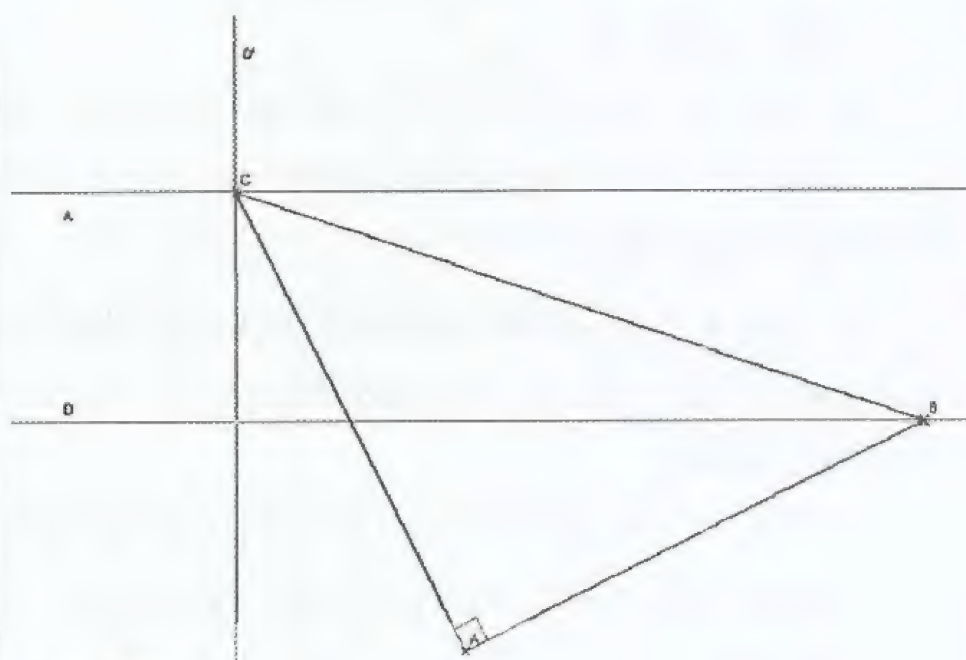
On a  $r(D) = D'$  alors  $D \perp D'$

On a  $\Delta \parallel D'$  alors  $\Delta \perp D'$  alors  $\Delta$  et  $D'$  sont sécantes en un point.

D'où  $\{C\} = \Delta \cap D'$

Construction :

- On construit  $D' = r(D)$
- $D'$  coupe  $\Delta$  en  $C$
- La perpendiculaire à  $(AC)$  en  $A$  coupe  $D$  en  $B$



### 10 S'ENTRAINER

Soit  $r$  la rotation direct de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$

on a  $\triangle AMP$  est un triangle équilatérale alors  $r(M) = P$

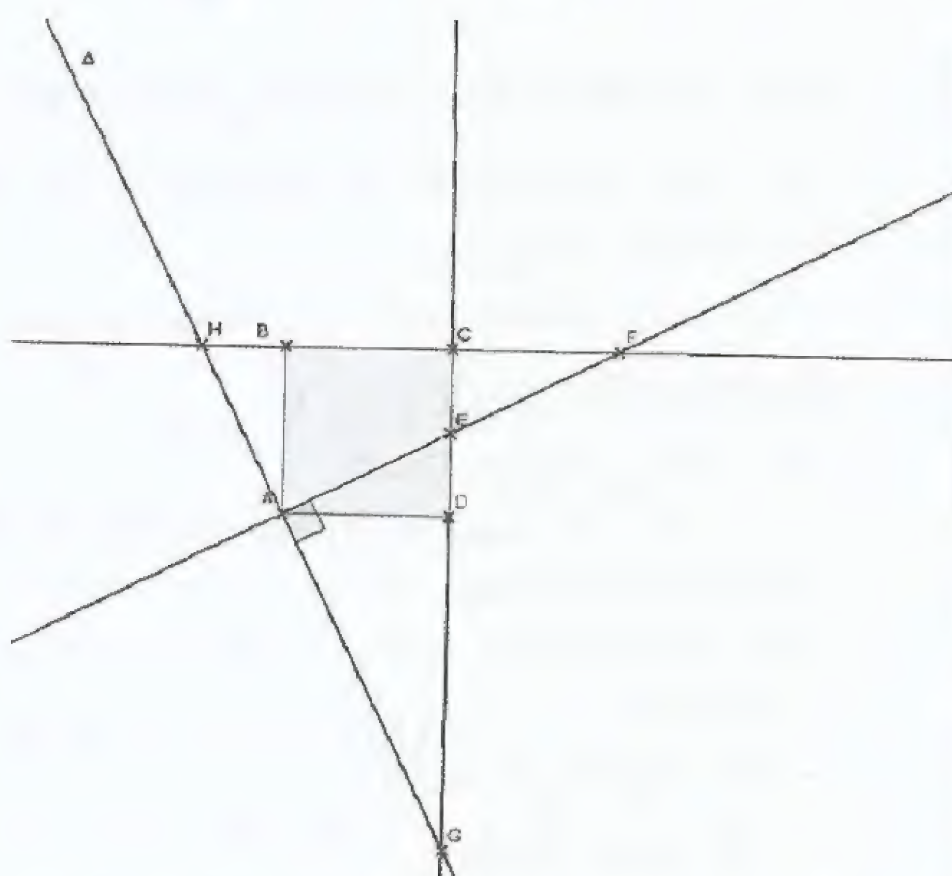
On a  $M \in [BC]$  alors  $r(M) \in r([BC])$

Alors  $M' \in [B'C']$  avec  $B' = r(B), C' = r(C)$

### 11 S'ENTRAINER

$E = C * D$





1) On a  $AD = AB$  et  $\widehat{DAB} = \frac{\pi}{2}$  dans le sens direct alors  $\tau(D) = B$

• On a  $r((DC))$  est la droite passante par  $r(D) = B$  est perpendiculaire à  $(DC)$  alors  $r((DC)) = (BC)$ .

• On a  $A \in \Delta$  alors  $r(\Delta)$  est la droite passante par  $r(A) = A$  et perpendiculaire à  $\Delta$  alors  $r(\Delta) = (AE)$

2) On a  $G \in \Delta \cap (CD)$  alors  $r(G) \in r(\Delta) \cap r((CD))$   
 $r(G) \in (AE) \cap (BC)$   $r(G) \in \{F\}$  alors  $r(G) = F$

3) On a

$F \in (CD) \cap (AE)$  alors  $r(E) \in r((CD)) \cap r((AE))$

•  $r((CD)) = (BC)$

•  $r((AE))$  est la droite passante par  $r(E) = H$  est perpendiculaire à  $(AE)$  alors  $r((AE)) = (AH)$  d'où  $r(E) \in (BC) \cap (AH)$ ,  $r(E) \in \{H\}$

alors  $r(E) = \{H\}$  alors  $AE = AH$  et  $\widehat{EAH} = \frac{\pi}{2}$

alors  $AEH$  est un triangle rectangle et isocèle en  $H$ .

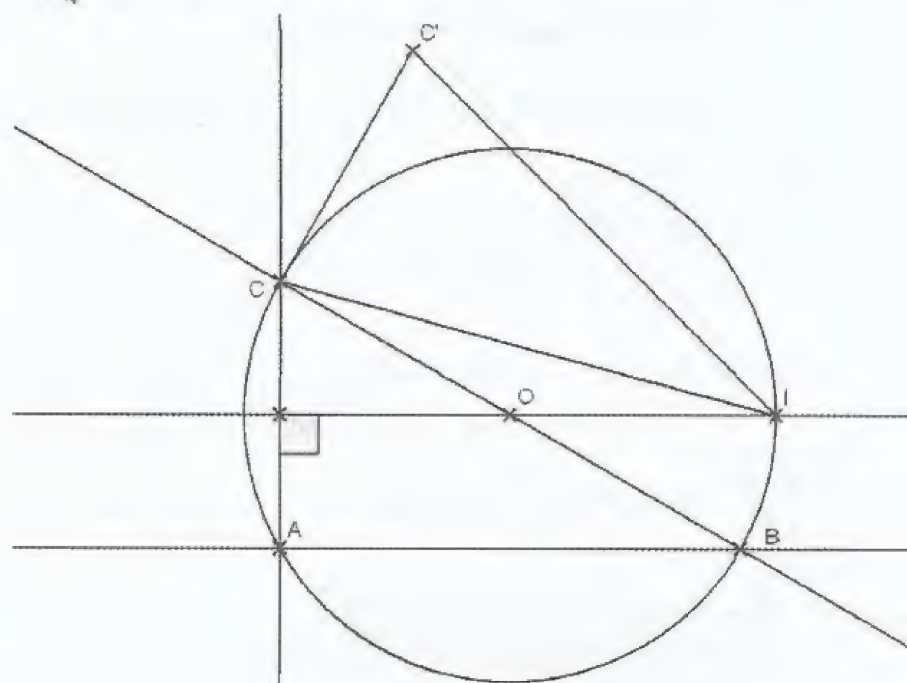
4) On a  $(GE) \perp (HF)$  alors  $(GE)$  porte l'hauteur issue de  $G$  dans  $FGH$ .

On a  $(FA) \perp (HG)$  alors  $(FA)$  porte l'hauteur issue de  $F$  dans  $FGH$  or  $(GE) \cap (FA) = \{E\}$

alors  $E$  est l'orthocentre de  $FGH$

12

S'ENTRAINER



1)  $\Delta$  est la médiane de  $[AC]$  et  $I \in \Delta$  alors  $IA = IC$

On a  $\widehat{AIC} = \widehat{ABC}$  (deux angles inscrits dans  $\zeta$  qui interceptent le même arc  $[AC]$  alors

$$\widehat{AIC} = \frac{\pi}{6}$$

On a

$$\begin{cases} IA = IC \\ \widehat{AIC} = \frac{\pi}{6} \text{ dans le sens direct} \end{cases} \text{ alors } r(A) = C$$

$$C' = r(C) \text{ alors } \begin{cases} IC = IC' \\ \widehat{CIC} = \frac{\pi}{6} \text{ dans le sens direct} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2) \text{ a) } r(I) = I \\ r(C) = C' \\ r(A) = C \end{cases} \text{ alors } r(\widehat{CAI}) = \widehat{C'CI}$$

alors  $\widehat{CAI} = \widehat{C'CI}$  car  $r$  conserve les angles géométriques

b) • On a  $IA = IC$  et  $\widehat{AIC} = \frac{\pi}{6}$

alors  $IA C$  est un triangle isocèle en  $I$  d'où

$$2\widehat{C'CI} + \frac{\pi}{6} = \pi \text{ d'où } \widehat{C'CI} = \frac{5\pi}{12}$$

$$\text{Or } \widehat{CAI} = \widehat{C'CI} \text{ alors } \boxed{\widehat{CAI} = \frac{5\pi}{12}}$$

$$\bullet \text{ On a } \widehat{BCI} = \widehat{ACI} - \widehat{ACB} = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$$



Conclusion

$$\widehat{BCC'} = \widehat{BCI} + \widehat{ICC'} = \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$$

alors  $(CC') \perp (BC)$

3) \* On a :

$$\left. \begin{array}{l} r(A) = C \\ r(C) = C' \end{array} \right\} \text{ alors } r((AC)) = (CC')$$

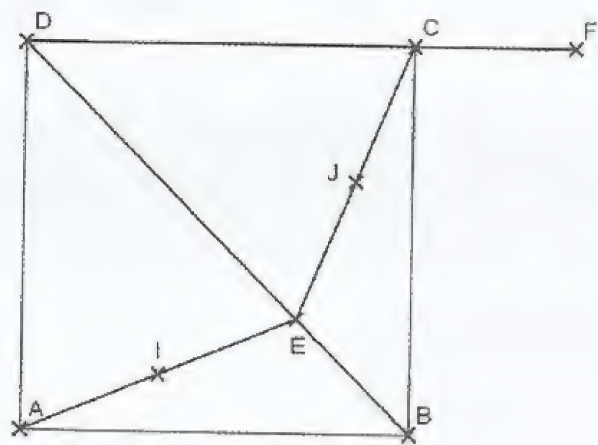
\* On a  $(AB) \perp (AC)$  alors  $r((AB)) \perp r((AC))$   
car  $r$  conserve l'orthogonalité alors  
 $r((AB)) \perp (CC')$

D'où l'image de  $(AB)$  par  $r$  est la droite  
perpendiculaire à  $(CC')$  passant par  $r(A) = C$  d'où

$$r((AB)) = (BC)$$

### 13 S'ENTRAÎNER

$R = r_{\left(D, \frac{\pi}{4}\right)}$   $R$  est directe



1)

• On a  $DA = DE$  et  $\widehat{ADE} = \frac{\pi}{4}$  dans le sens direct

alors  $r(A) = E$

• On a  $DE = DC$  et  $\widehat{EDC} = \frac{\pi}{4}$  dans le sens direct

alors  $r(E) = C$

• On a  $I = A * E$  alors  $r(I) = r(A) * r(E)$

alors  $r(I) = E * C$ , alors  $r(I) = J$

$$2) \left. \begin{array}{l} r(A) = E \\ r(E) = C \end{array} \right\} \text{ alors } AE = EC$$

Or  $I = A * E$  et  $J = C * E$  alors  $EI = EJ$   
alors  $EIJ$  est isocèle en  $E$

2)  $R(B) = F$  alors  $DB = DF$  et  $\widehat{BDF} = \frac{\pi}{4}$  dans le

sens direct

$r(B) = E$  alors  $DB = DF$

$$\text{or } BD = \sqrt{2}AB \text{ alors } \boxed{DF = AB\sqrt{2}}$$

$$\bullet \text{ On a } \left. \begin{array}{l} r(A) = E \\ r(B) = F \end{array} \right\} \text{ alors } AB = EF$$

$$\text{On a } DE^2 + EF^2 = AB^2 + AB^2 = 2AB^2 = (\sqrt{2}AB)^2 = DF^2$$

D'après la réciproque de théorème de Pythagore  
on a  $DEF$  est un triangle rectangle en  $E$

alors  $(DE) \perp (EF)$

### 14 SE PERFECTIONNER

1) On a  $BA = BI$  et  $\widehat{ABI} = \frac{\pi}{3}$  dans le sens

direct alors  $r(A) = I$

2) On a  $BJ = BC$  et  $\widehat{JBC} = \frac{\pi}{3}$  dans le sens direct

alors  $r(J) = C$

On a  $BCJ$  est un triangle équilatéral et  $K = C * J$

$$\text{alors } \boxed{BK = \frac{\sqrt{3}}{2}BC} \text{ et } \boxed{\widehat{CBK} = \frac{\pi}{6}}$$

On a  $ABC$  est un triangle en  $A$  alors  $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC}$

$$\text{alors } \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{alors } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{BC} \text{ alors } AB = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$$

Conclusion : on a  $AB = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$  et  $BK = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$

$$\text{alors } \boxed{BA = BK}$$

On a  $\widehat{KBA} = \widehat{KBC} + \widehat{CBA} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$  d'où  $r(K) = A$

3)  $\zeta_1$  de centre  $J$  et de rayon  $AK$  alors  $R(\zeta_1)$

est le cercle de centre  $R(J) = C$  et de

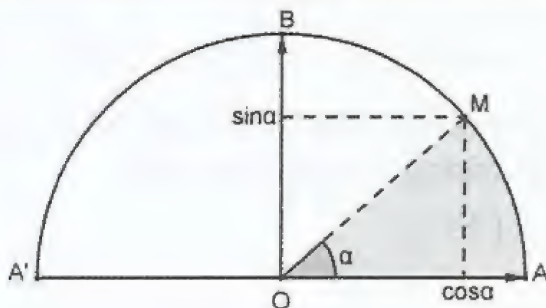
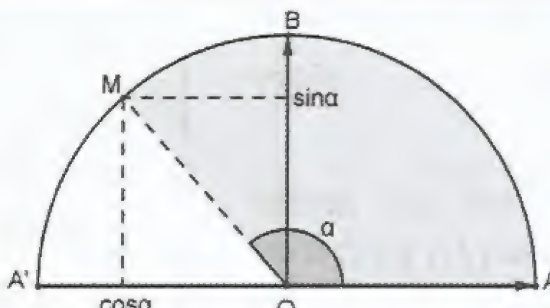
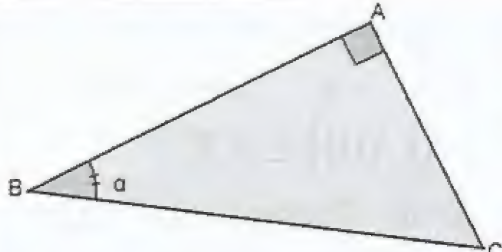
même rayon  $AK$  alors  $R(\zeta_1) = \zeta_2$



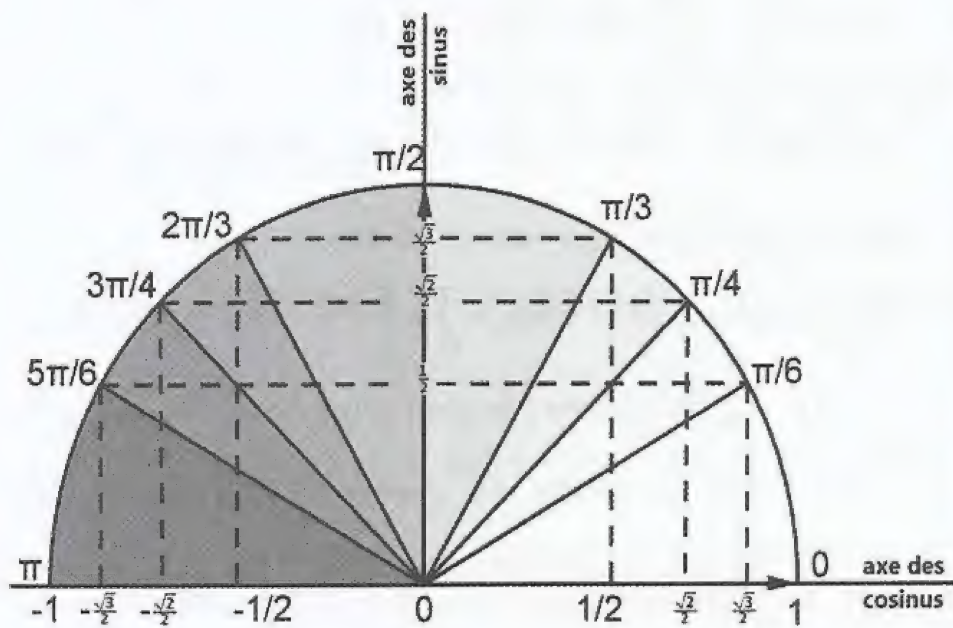
## Trigonométrie

### I) Résumé de cours

#### A) Définitions :

 <p><math>\alpha \in [0; \pi]</math> <math>\alpha \neq \frac{\pi}{2}</math>      <math>\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}</math> <math>\alpha \in ]0; \pi[</math>      <math>\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}</math></p>	 <p><math>\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]</math> équivaut à <math>(0 \leq \cos \alpha \leq 1)</math> <math>\alpha \in [\frac{\pi}{2}; \pi]</math> équivaut à <math>(-1 \leq \cos \alpha \leq 0)</math></p>	 <p><math>\sin \alpha = \frac{AC}{BC} \left( = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \right)</math> <math>\cos \alpha = \frac{BA}{BC} \left( = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \right)</math> <math>\tan \alpha = \frac{AC}{AB} \left( = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} \right)</math></p>	
<b>Relations fondamentales</b>	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

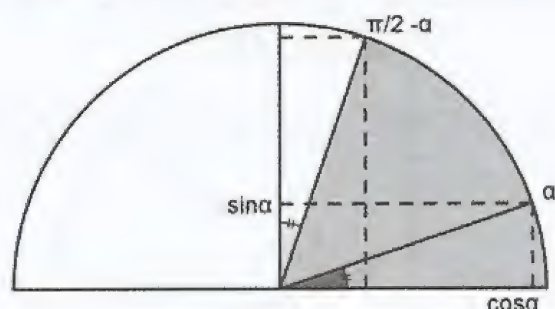
#### B) Angles remarquables



$\alpha$ (deg°)	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\alpha$ (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	



### Angles complémentaires



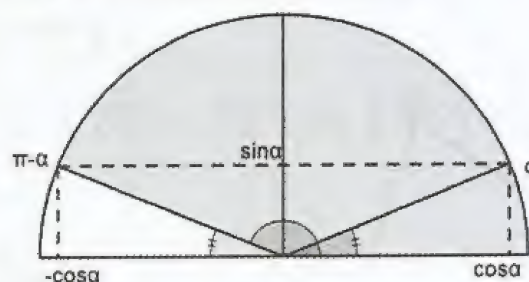
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$$

### Angles supplémentaires



$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x$$

$$\cot(\pi - x) = -\cot x$$

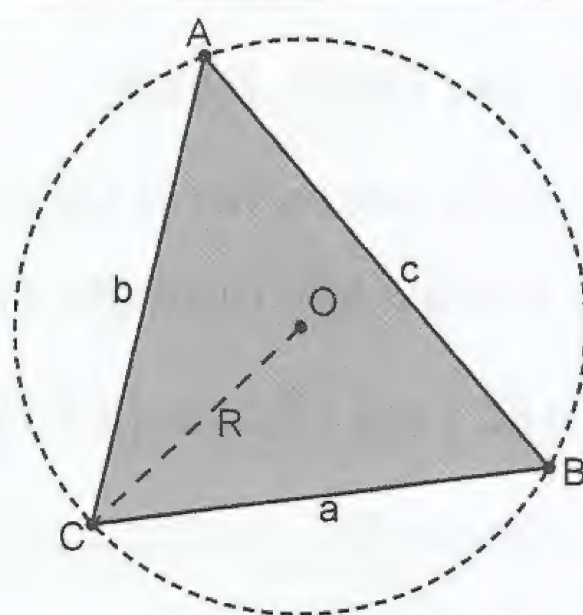
### C) Loi du sinus - Aire d'un triangle

$S$  est l'aire du triangle ABC

On a :

$$S = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2}ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2}ab \sin \hat{C}$$

$$\underbrace{\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}}_{\text{Loi du sinus}} = 2R = \frac{abc}{2S}$$



### Théorème d'El-Kashi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

### D) Relations métriques dans un triangle rectangle

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad (\text{Théorème de Pythagore})$$

$$AH \times BC = AB \times AC$$

$$AH^2 = HB \times HC$$

$$AB^2 = BH \times BC$$

$$AC^2 = CH \times CB$$







### E) Triangles isométriques

1 <sup>er</sup> cas	2 <sup>ème</sup> cas	3 <sup>ème</sup> cas

### II) Exercices



#### Q-C-M; VRAI-FAUX

Dans chacun des cas, cocher la bonne réponse

1) Dans un triangle ABC rectangle en A, le quotient  $\frac{AB}{AC}$  est :

$$\operatorname{tg}(\widehat{ABC}) \quad \cos(\widehat{ABC}) \quad \sin(\widehat{ABC}) \quad \cot g(\widehat{ABC})$$

2) Dans le triangle EFG rectangle en G,  $\cos(\widehat{FEG})$  est :

$$\frac{EG}{EF} \quad \frac{GE}{GF} \quad \frac{GF}{EF}$$

3) Dans le triangle IJK rectangle en I,  $\sin(\widehat{IKJ})$  est :

$$\frac{IJ}{KJ} \quad \frac{IK}{KJ} \quad \frac{IK}{IJ}$$

4) Dans un triangle ABC rectangle en A, on a  $\cos \widehat{B} = \sin \widehat{B}$

$$\operatorname{tg} \widehat{B} = 2 \quad \operatorname{tg} \widehat{B} = 1 \quad \operatorname{tg} \widehat{B} = 0$$

5) Dans un triangle TRI rectangle en I, on a  $\cos \widehat{T} = \sin \widehat{R}$

Impossible

TRI est isocèle

$$\operatorname{tg} \widehat{T} = 1$$

aucun de ces réponse



#### Q-C-M; VRAI-FAUX

Dans chacun des cas, cocher la bonne réponse

1) Soit EFG un triangle rectangle en E tel que EF = 6 et EG = 8. Soit H est le milieu de [FG] alors :

$$EH = 7 \quad \cos \widehat{F} = \frac{3}{4} \quad \operatorname{tg} \widehat{G} = \frac{3}{4} \quad \text{aire de EFG} = 24$$

2) Un rectangle ABCD a sa longueur qui est le triple de sa largeur. On note y la largeur, alors on a :



$$\sin(\widehat{BAC}) = \frac{1}{3} \cos(\widehat{BAC}) = \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ aire de ABCD} = 3y^2$$

3) Soit ABC un triangle isocèle en A tel que  $AB = 6$ ,  $\widehat{BAC} = 30^\circ$  et [AH] sa hauteur issue de A

$$AH = 3 \quad \sin \widehat{C} = \frac{AC}{AH} \quad \widehat{C} = 80^\circ \quad BC = 18\sqrt{3}$$

### 3 APPLIQUER

Soit  $x \in [0, \pi]$

1) On donne  $\tan x = \frac{3}{2}$ . Calculer  $\cos x$  et  $\sin x$

2) On donne  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . calculer  $\cos x$  et  $\tan x$

3) On donne  $\tan x = -\frac{3}{2}$ . Calculer  $\cos x$  et  $\sin x$

### 4 APPLIQUER

Sans utiliser ni la table trigonométrique ni une calculatrice. Calculer

$$A = \cos \frac{\pi}{14} + \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{14} - \sin \frac{2\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{14} - \sin \frac{3\pi}{7}$$

$$B = \tan \frac{\pi}{9} + \tan \frac{2\pi}{9} + \tan \frac{\pi}{3} + \tan \frac{4\pi}{9} + \tan \frac{5\pi}{9} + \tan \frac{2\pi}{3} + \tan \frac{7\pi}{9} + \tan \frac{8\pi}{9}$$

$$C = \cos^2 \frac{\pi}{5} + \cos^2 \frac{2\pi}{5} + \sin^2 \frac{3\pi}{5} + \sin^2 \frac{4\pi}{5}$$

$$D = \tan \frac{\pi}{12} \cdot \tan \frac{5\pi}{12} + \cotan \frac{\pi}{5} \cdot \tan \frac{4\pi}{5}$$

### 5 S'ENTRAINER

Sur la figure ce dessous ABC est un triangle, H le projeté orthogonal de A sur (BC),

$\widehat{BAH} = 45^\circ$ ;  $\widehat{HAC} = 30^\circ$  ET  $AH = 6\text{cm}$

Le cercle (C) de diamètre [AH] et de centre O coupe (AB) en D et (AC) en E.

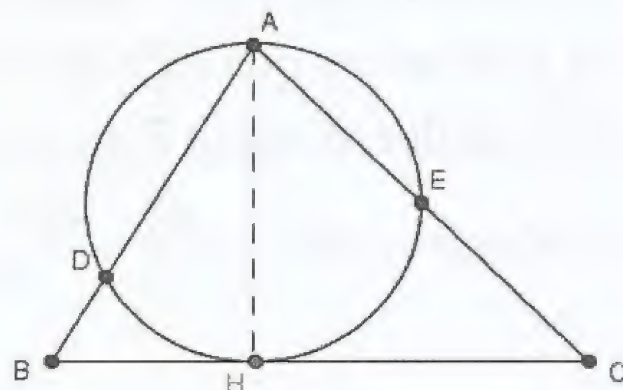
1)a) Calculer AB et AC.

b) Montrer que AHE est triangle rectangle

Montrer que  $AE = 3\sqrt{3}\text{ cm}$

2)a) Démontrer que  $\widehat{AHE} = \widehat{ADE} = 60^\circ$

En déduire que les triangles BAC et EAD sont semblables.





b) Après avoir rempli le tableau de proportionnalité des longueurs, déduisez-en que le rapport qui fait passer du triangle BAC au triangle EAD est  $\frac{\sqrt{6}}{4}$ . S'agit-il d'une

réduction ou d'un agrandissement ? Expliquer :

3)a) Calculer BC (on pourra couper par H)

b) Déduisez-en que  $DE = \frac{3}{2} \times (\sqrt{6} + \sqrt{2})$  cm

4) On note F le point diamétralement opposé à D sur C.

a) Démontrer que  $\widehat{DFE} = 75^\circ$

b) Déduisez-en que  $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$



### S'ENTRAINER

ABC est un triangle tel que  $AB = 3$ ,  $AC = 5$  et  $BC = 7$ .

1) Montrer que  $\hat{A} = \frac{2\pi}{3}$  ; puis construire le triangle ABC.

2) a) Calculer la mesure de l'aire du triangle ABC.

b) Calculer le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

3) Soit H le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC).

a- Calculer BH, AH et CH.

b- Calculer  $\sin \hat{ACB}$  et  $\sin \hat{ABC}$ .



### SEPERFECTIONNER

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A et de sens direct tel que :  $AB=4$ cm

1)a) Construire le point D image du point A par la rotation indirecte de centre B et d'angle  $\frac{\pi}{2}$

b) Construire le point I image du point D par la rotation directe de centre B et d'angle  $\frac{\pi}{3}$

2) a) Montrer que le quadrilatère ABDC est carré

b) calculer  $\hat{ABI}$  puis  $\hat{BAI}$

c) Calculer l'aire du triangle ABI

3) a) Montrer que  $AI^2 = 32 - 16\sqrt{3}$

b) Calculer le rayon R du cercle circonscrit au triangle ABI

c) Montrer que  $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$  et  $\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$





4) Soient J le symétrique du point B par rapport à A, O le centre du carré ABCD et  $\Omega$  le point tel que :.....

- Montrer que le triangle  $I\Omega J$  est isocèle rectangle
- Prouver que les deux triangles  $I\Omega J$  et OAB sont semblables.



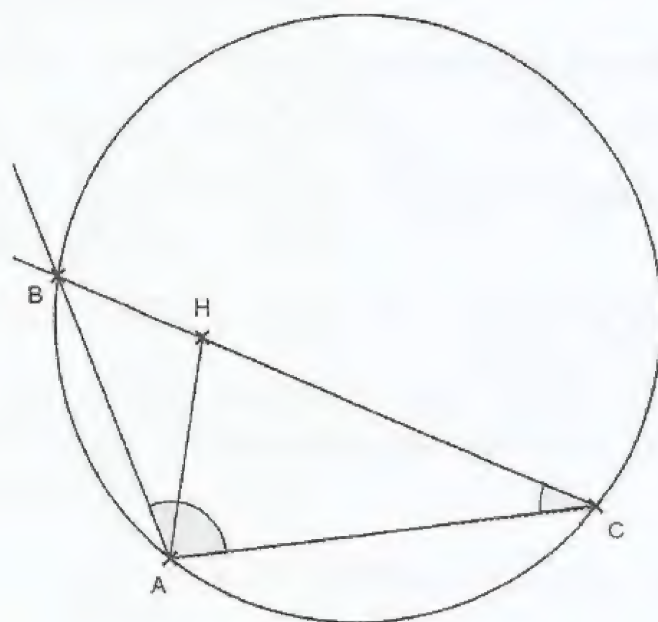
### SEPERFECTIONNER

I) Calculer  $\cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{7\pi}{12} - \sin \frac{7\pi}{12}$

II) ABC est un triangle inscrit dans un cercle  $\xi$  de centre O et de rayon  $R = 2\sqrt{2}$

On donne  $AC = 4$ ,  $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{6}$  et  $\widehat{ABC}$  un angle aigu

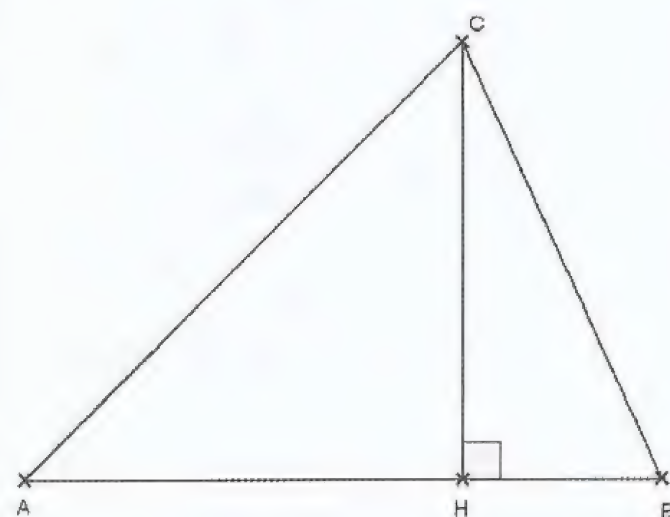
- Calculer AB
- Montrer que  $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{4}$
- Soit H le point de  $[BC]$  tel que  $AC = CH$
- Calculer l'aire du triangle AHC
- Calculer  $\widehat{AHB}$
  - Montrer que  $AH = 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$
  - En déduire que  $\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
  - Calculer alors  $\cos \frac{7\pi}{12}$



### SEPERFECTIONNER

Soit ABC un triangle tel que  $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$ ,  $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$  et  $AC = 4\sqrt{3}$

- Montrer que  $BC = 4\sqrt{2}$
- Calculer AH, BH et AB
- En déduire que  $\sin \left( \frac{5\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
  - Déterminer  $\cos \frac{\pi}{12}$ ,  $\cos \frac{7\pi}{12}$  et  $\cos \frac{11\pi}{12}$
  - Résoudre dans  $[0, \pi]$  l'inéquation  $\sin x \geq \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ .





**1 VRAI-FAUX; Q-C-M**

1)  $\cot g(\widehat{ABC})$  2)  $\frac{GF}{EF}$  3)  $\frac{IK}{KJ}$

4)  $tg \widehat{B} = 1$  5) aucun de ces réponses

**2 VRAI-FAUX; Q-C-M**

1)  $tg \widehat{G} = \frac{3}{4}$  et aire de EFG = 24

2)  $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{3}{\sqrt{10}}$  et aire de ABCD =  $3y^2$

3) AH = 3

**3 APPLIQUER**

1) On a :  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

2) donc  $1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{13}{4} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{13}$

Signifie que  $\Rightarrow \cos x = \frac{2}{\sqrt{13}}$  ou  $\cos x = -\frac{2}{\sqrt{13}}$

comme  $\tan x = \frac{3}{2} > 0$  donc  $\cos x = \frac{2}{\sqrt{13}}$ .

On sait que  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  donc

$\sin^2 x = 1 - \frac{4}{13} = \frac{9}{13}$  par suite  $\sin x = \frac{3}{\sqrt{13}}$

3)  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ou  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

On a :  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Si  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  alors  $\tan x = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

Si  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  alors  $\tan x = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

4) On a :  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  donc

$1 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{13}{4} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{13}$

Signifie que  $\Rightarrow \cos x = \frac{2}{\sqrt{13}}$  ou  $\cos x = -\frac{2}{\sqrt{13}}$

comme  $\tan x = -\frac{3}{2} < 0$  donc  $\cos x = -\frac{2}{\sqrt{13}}$

On sait que  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  donc

$\sin^2 x = 1 - \frac{4}{13} = \frac{9}{13}$  par suite  $\sin x = \frac{3}{\sqrt{13}}$

**4 APPLIQUER**

$A = \cos \frac{\pi}{14} + \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{14} - \sin \frac{2\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{14} - \sin \frac{3\pi}{7}$

On remarque que :  $\frac{\pi}{7} + \frac{5\pi}{14} = \frac{\pi}{2}$

donc  $\cos \frac{\pi}{7} = \sin \frac{5\pi}{14}$

$\frac{\pi}{14} + \frac{3\pi}{7} = \frac{\pi}{2}$  donc  $\cos \frac{\pi}{14} = \sin \frac{3\pi}{7}$

$\frac{3\pi}{14} + \frac{2\pi}{7} = \frac{\pi}{2}$  donc  $\cos \frac{3\pi}{14} = \sin \frac{2\pi}{7}$

Ainsi

$A = \cos \frac{\pi}{14} + \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{14} - \cos \frac{3\pi}{14} - \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{\pi}{14} = 0$

$B = \tan \frac{\pi}{9} + \tan \frac{2\pi}{9} + \tan \frac{\pi}{3} + \tan \frac{4\pi}{9}$

$+ \tan \frac{5\pi}{9} + \tan \frac{2\pi}{3} + \tan \frac{7\pi}{9} + \tan \frac{8\pi}{9}$

$= (\tan \frac{\pi}{9} + \tan \frac{8\pi}{9}) + (\tan \frac{2\pi}{9} + \tan \frac{7\pi}{9})$

$+ (\tan \frac{\pi}{3} + \tan \frac{2\pi}{3}) + (\tan \frac{4\pi}{9} + \tan \frac{5\pi}{9})$

On sait que si  $\alpha + \beta = \pi$  alors  $\tan \alpha = -\tan \beta$



Ainsi

$$= (\tan \frac{\pi}{9} - \tan \frac{\pi}{9}) + (\tan \frac{2\pi}{9} - \tan \frac{2\pi}{9})$$

$$+ (\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{3}) + (\tan \frac{4\pi}{9} - \tan \frac{4\pi}{9}) = 0$$

$$C = \cos^2 \frac{\pi}{5} + \cos^2 \frac{2\pi}{5} + \sin^2 \frac{3\pi}{5} + \sin^2 \frac{4\pi}{5}$$

On remarque que  $\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \pi$

$$\text{donc } \cos \frac{\pi}{5} = -\cos \frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \pi \text{ donc } \cos \frac{2\pi}{5} = -\cos \frac{3\pi}{5}$$

Ainsi

$$C = (\cos^2 \frac{4\pi}{5} + \sin^2 \frac{4\pi}{5})$$

$$+ (\cos^2 \frac{3\pi}{5} + \sin^2 \frac{3\pi}{5}) = 1 + 1 = 2$$

$$D = \tan \frac{\pi}{12} \cdot \tan \frac{5\pi}{12} + \cot n \frac{\pi}{5} \cdot \tan \frac{4\pi}{5}$$

$$= \tan \frac{\pi}{12} \cdot \tan \frac{5\pi}{12} + \frac{1}{\tan \frac{\pi}{5}} \cdot \tan \frac{4\pi}{5}$$

On sait que si  $\alpha + \beta = \pi$  alors  $\tan \alpha = -\tan \beta$

donc  $\tan \frac{4\pi}{5} = -\tan \frac{\pi}{5}$  et si  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  alors

$$\tan \alpha = \cot n \beta \text{ donc } \tan \frac{\pi}{12} = \cot n \frac{5\pi}{12}$$

$$\text{Ainsi } D = \cot \frac{5\pi}{12} \times \tan \frac{5\pi}{12} - 1$$

$$= \frac{1}{\tan \frac{5\pi}{12}} \cdot \tan \frac{5\pi}{12} - 1 = 1 - 1 = 0$$

5

### S'ENTRAINER

1) a) le triangle AHB est rectangle en H,

$$\cos \hat{BAH} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \times \cos \hat{BAH}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{AH}{\cos \hat{BAH}}$$

$$= \frac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 6\sqrt{2}.$$

De même dans le triangle AHC on a

$$AC = \frac{AH}{\cos \hat{HAC}} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{3}$$

b)  $E \in C$  de diamètre [AH] donc le triangle AHE est un triangle rectangle en E.

$$\text{c) } \cos \hat{AHE} = \frac{AE}{AH}$$

$$\Rightarrow AE = AH \times \cos \hat{AHE} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

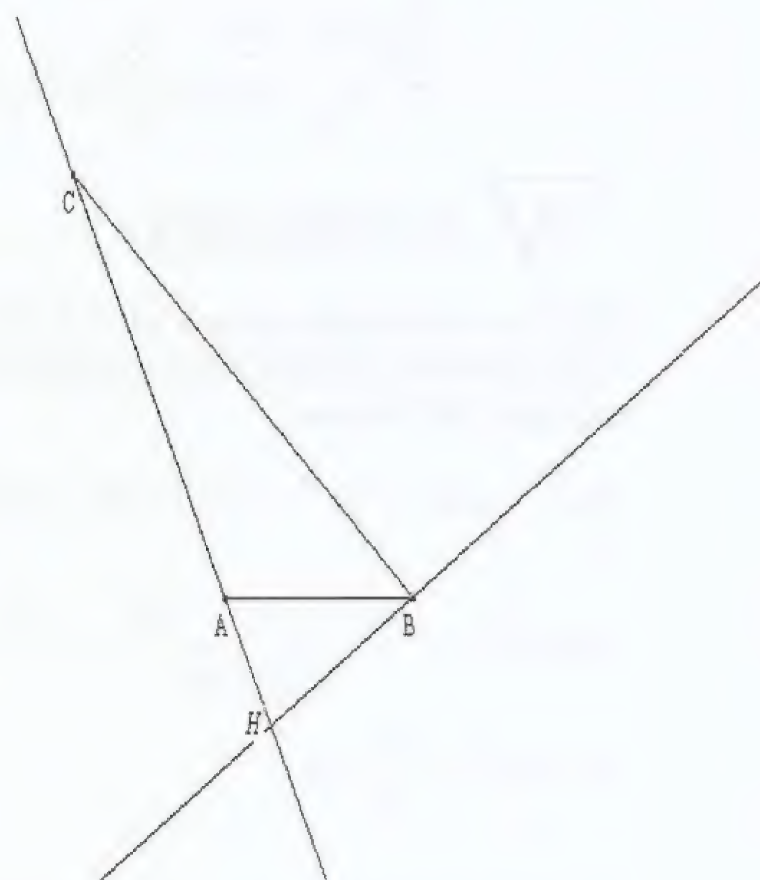
2) a) Il est clair que  $\hat{AHE} = 60^\circ$  (somme des angles dans un triangle).

$\hat{AHE}$  et  $\hat{ADE}$  deux angles inscrits dans le cercle C qui intercepte l'arc AE donc  $\hat{ADE} = \hat{AHE} = 60^\circ$   
Pour  $\hat{ACB} = 60^\circ$  (somme des angles dans le triangle AHC)

b) on a :  $\hat{ADE} = \hat{ACB} = 60^\circ$ ,  $\hat{EAD} = \hat{CAB} = 75^\circ$

et en déduit facilement que  $\hat{AED} = \hat{ABC} = 45^\circ$   
donc les deux triangles BAC et EAD sont semblables.

c)



$3\sqrt{2}$	$3\sqrt{3}$
$4\sqrt{3}$	$6\sqrt{2}$



Est un tableau de proportionnalité des longueurs, (car  $6\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 4\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} = 36$ ) de rapport  $\frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ . Il s'agit d'une réduction car le rapport est inférieur à 1.

$$3) \text{ a) } \sin \widehat{HAB} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{BH}{6\sqrt{2}} \Rightarrow BH = 6$$

$$\sin \widehat{HAC} = \frac{HC}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{HC}{4\sqrt{3}} \Rightarrow HC = 2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } DE &= BC \times \frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow DE = \frac{\sqrt{6}}{4}(6 + 2\sqrt{3}) \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{6} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

4) a)  $\widehat{ADE}$  est un angle inscrit dans le cercle qui intercepte l'arc  $\widehat{DE}$

$\widehat{DFE}$  est un angle inscrit dans le cercle qui intercepte l'arc  $\widehat{DE}$

$$\text{Donc } \widehat{DFE} = \widehat{DAE} = 75^\circ$$

b) le triangle DFE est rectangle en E,

$$\begin{aligned} \sin(75^\circ) &= \sin \widehat{DFE} = \frac{DE}{DF} = \frac{DE}{AH} \\ &= \frac{\frac{3}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{6} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1) \end{aligned}$$



## S'ENTRAÎNER

ABC est un triangle tel que  $AB = 3$ ,  $AC = 5$  et  $BC = 7$ .

1. La formule d'ELKACHY appliquée dans le triangle ABC donne :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} \\ \Rightarrow \cos \widehat{BAC} &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC} = \frac{9 + 25 - 49}{30} = -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow \widehat{BAC} &= \frac{2\pi}{3} \text{ rad.} \end{aligned}$$

2. a) Soit  $S$  l'aire du triangle ABC, on a :

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

b) La loi des sinus appliquées dans le triangle ABC donne :

$$\begin{aligned} \frac{BC}{\sin \widehat{A}} &= \frac{AB}{\sin \widehat{C}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB \times AC \times BC}{2S} = 2R \\ \Rightarrow R &= \frac{BC}{2 \sin \widehat{A}} = \frac{7}{2 \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{7\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

3. Soit  $H$  le projeté orthogonal du point  $B$  sur la droite  $(AC)$ .

a) \* Dans le triangle ABH rectangle en  $H$ , on a :

$$\sin\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

\* Dans le même triangle, on peut aussi écrire :

$$\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = \frac{3}{2}.$$

$$* CH = CA + AH = 5 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2}.$$

$$\text{b) } * \sin \widehat{ACB} = \sin \widehat{HCB} = \frac{BH}{BC} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{7} = \frac{3\sqrt{3}}{14},$$

$$\text{ou bien } \sin \widehat{ACB} \stackrel{\substack{= \\ \text{loi des sinus}}}{=} \frac{AB}{2R} = \frac{3}{\frac{14\sqrt{3}}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

$$* \sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{2R} = \frac{5}{\frac{14\sqrt{3}}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{21}.$$



## SE PERFECTIONNER

1) a) Voir figure

b) Voir figure

$$2) \text{ a) On a : } r_{\left(B, \frac{\pi}{2}\right)}(A) = D \Rightarrow (AB) \perp (BD)$$

et  $AB = BD$

On a aussi  $(AB) \perp (AC)$  et  $AB = AC$  donc  $(AC) \parallel (BD)$  et  $BD = AC$  donc ABDC est un losange qui à un angle rectangle donc ABDC est un carré.

$$\text{b) } \widehat{ABI} = \widehat{ABD} - \widehat{DBI} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} (30^\circ)$$





On a :  $r_{\left(B, \frac{\pi}{3}\right)}(D) = I \Rightarrow BD = BI$  or  $BD = BA$

donc  $BI = BA$ , alors le triangle  $ABI$  est isocèle en  $B$ .

$$\widehat{IBA} + \widehat{BAI} + \widehat{AIB} = \pi$$

$$\Rightarrow 2\widehat{BAI} = \pi - \widehat{IBA} = \frac{\pi - \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{5\pi}{12} (75^\circ)$$

3) a) D'après le théorème d'El-Kashi on a :

$$AI^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 16 + 16 - 2 \times 16 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

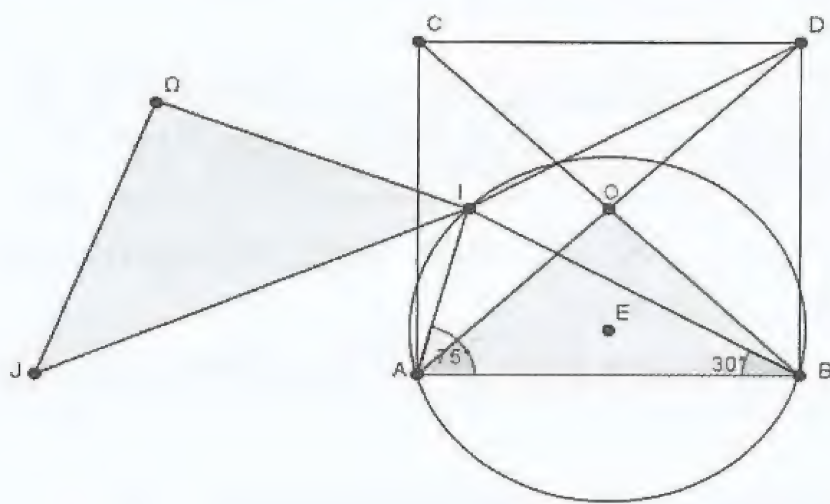
$$= 32 - 16\sqrt{3}$$

$$\text{b) } 2R = \frac{BI}{\sin \widehat{A}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{4}{2 \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)}$$

$$= \frac{2}{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)} = \frac{2}{0.97} = 2.06$$

c)





## Géométrie Analytique

### I) Résumé de cours

#### A) Calcul vectoriel dans un repère :

Soit O, I et J trois points non alignés du plan. On pose  $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$  et  $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ . Dans toute la suite, on considère le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

#### 1) Différents types de repères :

Orthonormé (maille: carré)	Orthogonal (maille : rectangle)	Quelconque (maille : parallélogramme)
$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) = \frac{\pi}{2}$ et $OI = OJ$	$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) = \frac{\pi}{2}$ et $OI \neq OJ$	$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) \neq \frac{\pi}{2}$ et $OI \neq OJ$

#### a) Coordonnées d'un point du plan :

Le couple de coordonnées d'un point M dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  ;  $M(x; y)$  est l'unique couple  $(x; y)$  de réels tels que  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

#### b) Coordonnées d'un vecteur du plan.

Le couple de coordonnées d'un vecteur  $\vec{u}$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  ;  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  est l'unique couple  $(x; y)$  de réels tels que  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

### 2) Opérations vectorielles :

#### a) Egalité de deux vecteurs :

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées dans le même repère.



### B) Opérations algébriques :

On considère un réel  $k$  et deux vecteurs  $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Le vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ .

Le vecteur  $k\vec{u}$  pour coordonnées :  $\begin{pmatrix} k \times x \\ k \times y \end{pmatrix}$

#### 1) Coordonnées d'un vecteur en fonction de ses représentants :

Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

### C) Applications :

#### 1) Calcul de la norme d'un vecteur dans un repère orthonormé :

Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points du plan dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = d(A; B) = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

#### 2) Calcul des coordonnées du milieu d'un segment :

Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points du plan dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Les coordonnées du milieu de  $[AB]$  sont  $\left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$

### D) Déterminant et colinéarité :

#### 1) Définition du déterminant de deux vecteurs :

On considère deux vecteurs  $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

On appelle déterminant des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le réel  $Dét(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$

#### 2) caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs :

Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

#### a) Equation de droite :

Analytiquement, la droite  $\Delta$  est définie ainsi :  $\Delta : \{M(x, y) / ax + by + c = 0\}$

L'expression «  $ax + by + c = 0$  » est appelée équation cartésienne de la droite  $\Delta$ .

Selon que  $b$  est nul ou non, on peut écrire cette expression sous la forme  $x = d$  ou  $y = mx + p$ . On parle dans ce cas de l'équation réduite de  $\Delta$ .

#### Remarque :

Seules les équations réduites du type  $y = mx + p$  sont fonctionnelles. Dans ce type d'équations, la fonction liée est la fonction affine  $x \mapsto mx + p$  ( $m$  : coefficient directeur et  $p$  : ordonnée à l'origine).



**b) Vecteur directeur d'une droite :**

On dit qu'un vecteur est directeur d'une droite donnée, lorsqu'il a la même direction que cette droite.

**Remarque :**

Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est un vecteur directeur de la droite (AB).

Une droite admet une infinité de vecteur directeurs, qui sont tous colinéaires.

**c) Coordonnées d'un vecteur directeur :**

Si une droite a pour équation  $y = mx + p$ , alors un vecteur directeur de cette droite a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$

***E) Caractérisation du parallélisme et de l'orthogonalité de deux droites du plan :******1) Caractérisation du parallélisme***

Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Deux droites non verticales sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux.

***2) Caractérisation de l'orthogonalité :***

Deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Deux droites non verticales sont orthogonale si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs vaut -1

**II) Exercices****Q-C-M**

1) Soit A(-1, 3) et B(2, -5) alors :  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$  ;  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$  ;  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

2) Les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$  sont : colinéaires ; égaux ; quelconque

3) A(-1,3) et  $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Le point M tel que  $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$  est tel que : M(6,1) ; M(4,7) ; M (-4,-7)

4) ABC un triangle, G le centre de gravité et J le milieu de [AC]. Alors :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BJ} \quad ; \quad \overrightarrow{GJ} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{GB} \quad ; \quad \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{AB}$$

5) Soit A(2,-1) et B(3,2), l'équation cartésienne de la droite (AB) est :

$$3x - y - 7 = 0 \quad ; \quad 6x - 2y + 7 = 0 \quad ; \quad 3x + y + 7 = 0$$

6) Un vecteur directeur  $\vec{u}$  de la droite  $D : x + 3y + 2 = 0$  est :  $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  ;  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  ;  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$





7) Soit  $D : ax + by + c = 0$  et  $D' : a'x + b'y + c' = 0$  alors  $D // D'$  si et seulement si :

$$a'b + ab' = 0 \quad ab' - a'b = 0 \quad ac' - ca' = 0$$

8) Un vecteur normal à la droite  $D : 5x + 4y = 0$  est :  $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  ;  $\vec{n}\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$  ;  $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

9) Les deux droites  $D : 6x - 5y + 3\sqrt{2} = 0$  et  $D' : x + 6y - 2 = 0$  sont deux droites :  
perpendiculaires ? Parallèles ?

10) Soit  $D : y = mx + p = 0$  et  $D' : y = m'x + p' = 0$  alors :

$$D // D' \text{ si et seulement si : } m = m' ; m.m' = -1$$

$$D \perp D' \text{ si et seulement si : } m = m' ; m.m' = -1$$



## 2 APPLIQUER

On considère le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  ainsi que les points A, B et C de coordonnées :  $A(2;1)$  ;  $B(-1;-1)$  ;  $C(1;2)$

1) Placez les points A, B et C.

2) Déterminez les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{AC}$  dans  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

3) On considère à présent le repère  $(B; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})$ . Quel est le type de ce repère ?

4) Déterminez à nouveau les coordonnées des points A, B et C et des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{AC}$



## 3 APPLIQUER

Dans le plan muni d'un repère quelconque, on donne les points suivants :

$$A(-1;1) ; B(1;-2) ; C(5;1) ; D(3;4)$$

1) Placez ces points.

2) Déterminez les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{DC}$ . Déduisez-en la nature de ABCD.



## 4 APPLIQUER

A(-2;1), B(0,-2) et C(3;-1) sont des points dans un repère quelconque.

1) Déterminez les coordonnées du point F pour que ABCF soit un parallélogramme.

2) Calculez les coordonnées de la somme vectorielle  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ .

3) Déduisez-en une deuxième manière pour déterminer les coordonnées du point F.



### 5 APPLIQUER

On reprend les données de l'exercice 2 dans un repère orthonormé.

- 1) Déterminez les coordonnées des milieux de  $[AC]$  et  $[BD]$ . Qu'en concluez-vous concernant ABCD ?
- 2) Calculez la longueur des segments  $[AC]$  et  $[BD]$ . Qu'en concluez-vous concernant ABCD.

### 6 APPLIQUER

Dans un repère, on donne les points suivants :  $A\left(-\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$   $B\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$   $C\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$   $D\left(\frac{13}{4}; 3\right)$

- 1) Démontrez que les points A, B et C sont alignés.
- 2) les points B, C et D sont-ils alignés ?
- 3) On considère un point M(x,y). Déterminez une condition sur x et y telle que  $M \in (AB)$

### 7 APPLIQUER

On considère les droites D et D' d'équation respectives :  $x-2=0$  et  $x+3y=4$

- 1) Construisez les deux droites sans passer par leur équations réduites.
- 2) Déterminez algébriquement si le point E (7 ; -1) appartient à D ou à D'.

### 8 APPLIQUER

On considère les points suivants A (1 ; 3) ; B (1 ; 4) ; C(1 ; 2) et D(3 ; 1)

- 1) Donnez une équation de la droite (AB) et de la droite (CD).
- 2) Déterminez un vecteur directeur de (AB) et un vecteur directeur de (CD)

### 9 APPLIQUER

On considère les droites suivantes, définies par leurs équations.

$$\Delta_1 : 2x + 3y - 12 = 0 \quad \Delta_2 : 2x - 10 = 0 \quad \Delta_3 : y = 17 \quad \Delta_4 : 3x - 2y + 4 = 0 \quad \Delta_5 : 54x + 81y - 405 = 0$$

$$\Delta_6 : x = 2$$

- 1) Précisez les droites parallèles et orthogonales en vous basant uniquement sur leurs équations.
- 2) Déterminez l'équation de la parallèle à  $\Delta_4$  passant par l'origine du repère.
- 3) Déterminez l'équation de la perpendiculaire à  $\Delta_1$  passant par le point (3 ; 0)



## 10 S'ENTRAINER

Dans le plan muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  on considère les points  $A(1,4)$ ,  $B(2,1)$  et  $C(6,5)$

- 1) Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure
- 2) Déterminer une équation de la droite (AI) où I le milieu de [BC]
- 3) Déterminer une équation de la droite passant par B et parallèle à la droite (AC)
- 4) Résoudre le système suivant 
$$\begin{cases} x + 3y - 13 = 0 \\ -x + 5y - 3 = 0 \end{cases}$$

Interpréter graphiquement

- 5) Montrer que les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC sont  $\left(3, \frac{10}{3}\right)$

6) Soit D le point tel que BGCD soit un parallélogramme.

Calculer les coordonnées de D.

- 7) Montrer que  $D \in (AI)$

## 11 S'ENTRAINER

Dans le plan muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  on considère la droite (d) d'équation

$x - 2y + 3 = 0$  ainsi que les points  $A\left(2, \frac{5}{2}\right)$ ,  $B(-3, 1)$ ,  $C\left(6, \frac{9}{2}\right)$  et  $E(-1, -1)$

- 1) Soit F le point tel que  $\vec{OF} = 3\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$ . Démontrer que le triangle ACF est rectangle en F
- 2) On considère le vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées (2,0). Déterminer les coordonnées du point G tel que  $\vec{FG} = \vec{u}$
- 3) On appelle H le milieu de [AC]. Calculer ses coordonnées. Montrer que (d) et (GH) sont perpendiculaires.
- 4) Soit K le point tel que  $\vec{HK} = \vec{GH}$ . Quelle est la nature de AKCG
- 5) Démontrer que les points A, C, F, G et K appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

## 12 SEPERFECTIONNER

$R(O, \vec{i}, \vec{j})$  est un repère orthonormé du plan

- 1) Soit D la droite passant par  $A(4,6)$  et de coefficient directeur  $\frac{1}{2}$ . Donner une équation cartésienne de D.
- 2) a) Déterminer une équation cartésienne du cercle C de centre  $I(-1,1)$  et tangent à la droite D.  
b) Trouver les coordonnées du point de contact H de C et D.
- 3) Trouver les tangentes à C issue du point  $B(2,0)$



13

### SEPERFECTIONNER

Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé du plan

On désigne par  $(C)$  l'ensemble des points  $M(x; y)$  tels que  $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$

Et par  $(\Delta)$  la droite d'équation  $x + y - 1 = 0$

1)a) montre que  $(C)$  est un cercle dont on précisera le centre  $I$  et le rayon  $R$

b) vérifier que  $I \in (\Delta)$

2)a) vérifier que le point  $M(-1; 2) \in (C)$

b) écrire une équation de la tangente  $(\Delta')$  au cercle  $(C)$  en  $M$

c) prouver que les droites  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  sont perpendiculaires

d) déterminer une équation de l'autre tangente à  $(C)$  et perpendiculaire à  $(\Delta)$

3)a) soit  $EFG$  un triangle équilatéral de côté  $a$ .

Exprimer en fonction de  $a$  la distance du point  $G$  à la droite  $(EF)$ .

b) déterminer les équations des droites parallèles à  $(\Delta)$  qui coupent le cercle  $(C)$  en deux points  $A$  et  $B$  tels que  $IAB$  soit un triangle équilatéral.

14

### SEPERFECTIONNER

On considère les droites  $D : 2x + 2y - 1 = 0$  et  $T : 5x - y + 3 = 0$ .

1) Montrer que  $D$  et  $T$  sont sécantes en un point  $I$ . Déterminer les coordonnées de  $I$ .

2) Tracer  $D$  et  $T$  dans le repère  $R$ .

3) Soit un réel  $m$  et l'ensemble  $D_m = \{ M(x, y) \text{ tel que } mx + (2m-3)y + 2 = 0 \}$

4)a) Montrer que pour tout réel  $m$ ,  $D_m$  est une droite.

b) Déterminer  $m$  pour que les droites  $D_m$ ,  $T$  et  $D$  soient concourantes.

15

### SEPERFECTIONNER

On considère l'ensemble  $C : x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0$

1) Montrer que  $C$  est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

2) Vérifier que  $A(1, -1)$  appartient à  $C$ .

3) Déterminer une équation cartésienne de la tangente au cercle  $C$  en  $A$ .

4) Soit la droite  $D : x + 2y - 1 = 0$ . Etudier la position relative de  $C$  et  $D$ .

5) Soit la droite  $D_m$  d'équation  $D_m : y = x + m$ . Pour quelles valeurs  $D_m$  est tangente à  $C$  ?

16

### SEPERFECTIONNER

Soit  $ABC$  un triangle rectangle en  $A$  et tel que  $AB = 4$  et  $AC = 3$

Déterminer l'ensemble  $E$  des points  $M$  tels que  $MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 66$





### 1 Q-C-M

1)  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$  2) colinéaires 3) M(4,7)

4)  $\overrightarrow{GJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$  5)  $3x - y - 7 = 0$

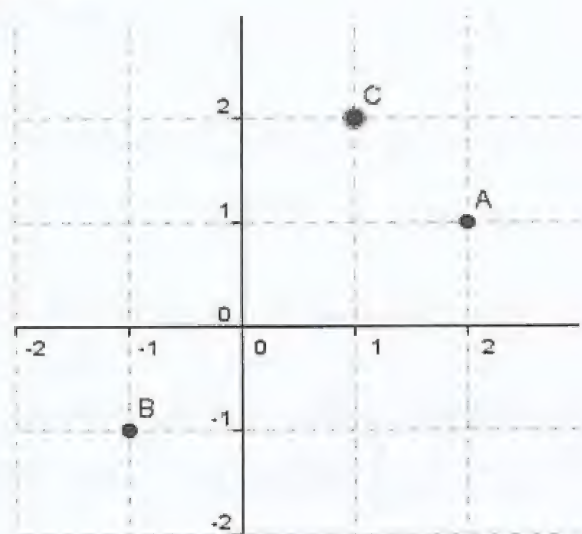
6)  $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  7)  $ab' - a'b = 0$  8)  $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

9) perpendiculaires

10)  $m = m', m.m' = -1$

### 2 APPLIQUER

1) voir figure



2)  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1-2 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -1-(-1) \\ 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

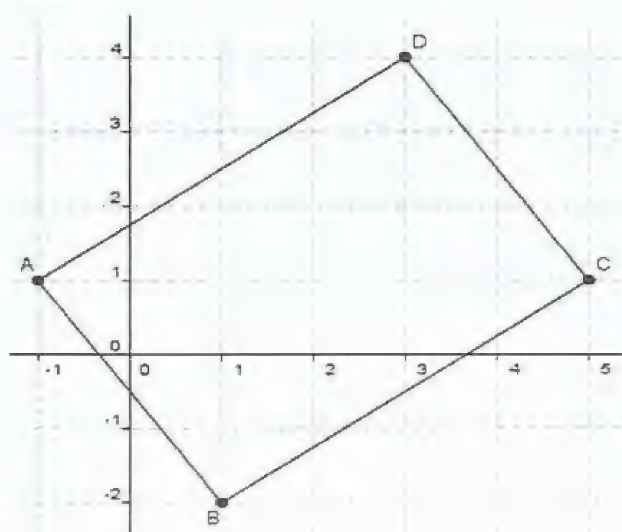
3) Le repère  $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$  n'est pas un repère orthogonal

4) A(0,1); B(0,0); C(1,0)

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ;  $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

### 3 APPLIQUER

1) Voir figure



2)  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  on remarque que  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$  donc ABCD est parallélogramme.

### 4 APPLIQUER

1) ABCF est un parallélogramme signifie que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CF}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-x \\ -1-y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x=1, y=2 \text{ donc } F(1,2)$$

2)  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

3)  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BF}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ donc } F(1,2)$$

### 5 APPLIQUER

1) Soit I le milieu de [AC] donc  $x_I = \frac{-1+5}{2} = 2$  et

$$y_I = \frac{1+1}{2} = 1 \text{ alors } I(2,1)$$

Soit J le milieu de [BD] donc  $x_J = \frac{1+3}{2} = 2$  et

$$y_J = \frac{4-2}{2} = 1 \text{ alors } J(2,1)$$

On remarque que [AC] et [BD] se coupent en même milieu I et par suite ABCD est un parallélogramme.

2)  $AC = \sqrt{0^2 + 6^2} = 6$ ,  $BD = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}$

### 6 APPLIQUER

1)  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ;  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ ;  $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC}$

sont colinéaires donc A, B et C sont alignés

2)  $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;  $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ;  $\begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 - \frac{11}{4} \neq 0$

donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires et par suite B, C et D ne sont pas alignés



3) Soit  $M \in (AB)$  donc  $\overrightarrow{AM}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont colinéaires signifie que  $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$  signifie que

$$\begin{vmatrix} x + \frac{7}{2} & 4 \\ y + \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x + 7 - 4y - 2 = 0$$

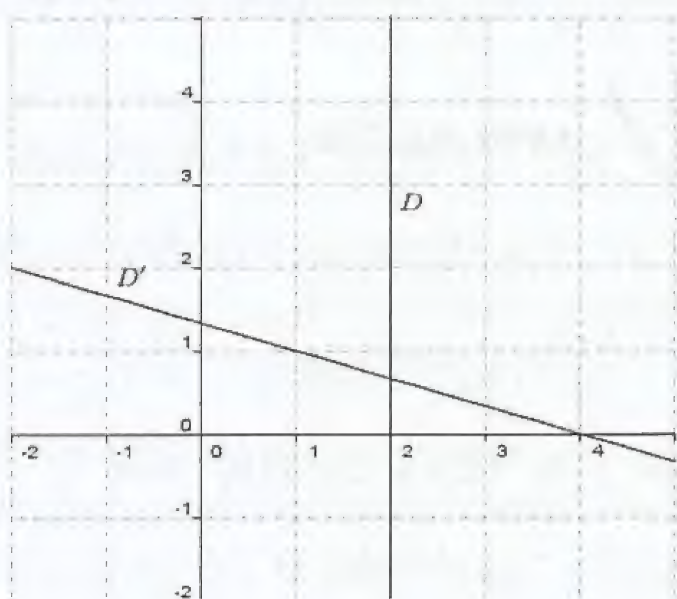
$$\Leftrightarrow 2x - 4y + 5 = 0$$

### 7 APPLIQUER

1) Les points  $A(2,0)$  et  $B(2,1)$  appartiennent à la droite  $D$  et  $H(1,1)$  et  $K(-2,2)$  appartiennent à la droite  $D'$

(Car  $-2 + 3 \times 2 = 4$  et  $1 + 3 \times 1 = 4$ )

2) Pour  $x = 7$ ,  $7 - 2 = 5 \neq 0$  et  $7 + 3 \times (-1) = 7 - 3 = 4$  donc  $E \notin D'$ .



### 8 APPLIQUER

1)  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de  $(AB)$

Soit  $M \in (AB)$  donc  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AM}$  sont colinéaires signifie que  $\begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ y-3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x-1=0$  donc  $(AB) : x=1$

Soit  $M \in (DC)$ ,

$$\text{donc } \begin{vmatrix} 3-x & -2 \\ 1-y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - x - 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 5 = 0$$

2)  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  vecteur directeur de  $(AB)$  et  $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  vecteur directeur de  $(DC)$

### 9 APPLIQUER

1) Ecrivons les équations réduites des droites

$$\Delta_1 : y = -\frac{2}{3}x + 6 ; \Delta_2 : x = 5 ; \Delta_3 : y = 17 ;$$

$$\Delta_4 : y = \frac{3}{2}x + 2 ; \Delta_5 : y = -\frac{2}{3}x + 5 ; \Delta_6 : x = 2$$

Donc  $\Delta_1 // \Delta_5$  et  $\Delta_2 // \Delta_6$

$\Delta_3 \perp \Delta_2$ ,  $\Delta_3 \perp \Delta_6$ ,  $\Delta_1 \perp \Delta_4$  et  $\Delta_5 \perp \Delta_4$

2) Soit  $\Delta : y = ax + b$  tel que  $\Delta_4 // \Delta$  alors  $a \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -1 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$  et  $O \in \Delta$  donc  $0 = 0 + b$  ce qui

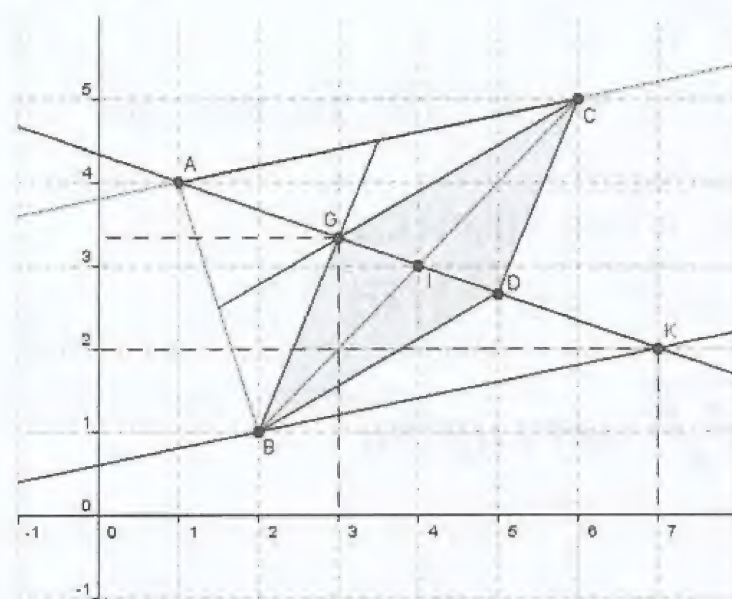
donne  $b = 0$ , ainsi  $\Delta : y = \frac{3}{2}x$

3) Soit  $\Delta' : y = ax + b$

tel que  $\Delta' \perp \Delta_1 \Rightarrow a \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -1 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$  comme le point de coordonnées  $(3,0) \in \Delta'$  donc  $0 = 3 \times \frac{3}{2} + b \Rightarrow b = -\frac{9}{2}$  par suite  $\Delta' : y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$

### 10 S'ENTRAINER

1) Voir figure



2) I le milieu de  $[BC]$  donc  $x_I = \frac{2+6}{2} = 4$  et

$$y_I = \frac{5+1}{2} = 3, I(4,3)$$



$\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de (AI) donc (AI) :

$-x - 3y + c = 0$  comme  $A \in (AI)$  donc  
 $-1 - 3 \times 4 + c = 0 \Rightarrow -13 + c = 0 \Rightarrow c = 13$  par  
 suite (AI) :  $x + 3y - 13 = 0$

2) Soit (d) la droite passant par B tel que (d) // (AI)  
 $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de (d) donc

(AC) :  $x - 5y + c = 0$  comme  $B \in (AC)$   
 $\Rightarrow 2 - 5 + c = 0 \Rightarrow c = 3$  par suite (AC) :  $x - 5y + 3 = 0$

$$3) \begin{cases} x + 3y - 13 = 0 \\ -x + 5y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 13(1) \\ x - 5y = -3(2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 8y = 16 \Rightarrow y = 2$$

$$(1) \Rightarrow x = 13 - 6 = 7$$

$$S_{\mathbb{R}^2} = \{(7, 2)\}$$

Donc  $(AI) \cap (d) = \{K(7, 2)\}$

4) G le centre de gravité du triangle ABC donc elle  
 vérifier la relation suivante :  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Soit (x, y) les coordonnées de G on aura donc  
 $x = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 3$  et  $y = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{10}{3}$

$$5) \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-x \\ 5-y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow D \left( 5, \frac{8}{3} \right)$$

$$6) 5 + 3 \times \frac{8}{3} - 13 = 5 + 8 - 13 = 0 \Rightarrow D \in (AI)$$

## 11 S'ENTRAINER

$$1) \text{ On a : } \overrightarrow{OF} = 3\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} \Rightarrow F \left( 3, \frac{3}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{FC} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$AC = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}; AF = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \text{ et}$$

$$FC = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$$

$FC^2 + AF^2 = AC^2$  donc le triangle ACF est  
 rectangle en F.

2) Soit (x, y) les coordonnées du point G

$$\overrightarrow{FG} = \vec{u} \Rightarrow \begin{pmatrix} x-3 \\ y-\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ donc } G \left( 5, \frac{3}{2} \right).$$

$$3) * x_H = \frac{2+6}{2} = 4 \text{ et } y_H = \frac{\frac{5}{2} + \frac{9}{2}}{2} = \frac{7}{2} \text{ donc } H$$

$$\left( 4, \frac{7}{2} \right).$$

\*  $\overrightarrow{GH} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de (GH)

$\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de (d)

$$-1 \times 2 + 1 \times 2 = 0 \text{ donc } (d) \perp (GH)$$

4) Soit (x, y) les coordonnées du point K

$$\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{GH} \Rightarrow \begin{pmatrix} x-4 \\ y-\frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow K \left( 3, \frac{11}{2} \right)$$

$\overrightarrow{AK} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{GC} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$  donc  $\overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{GC}$  par suite

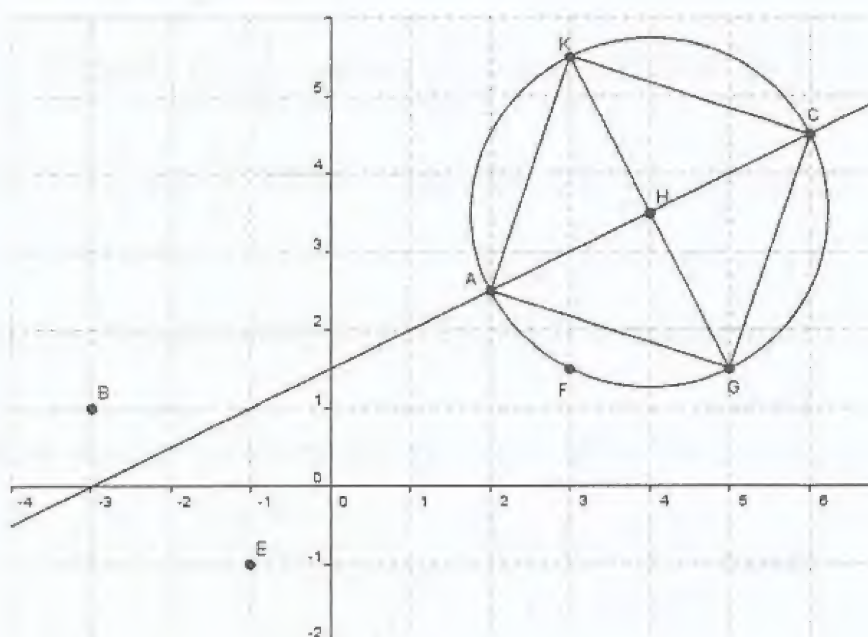
AKCG est un parallélogramme

On remarque que les points A et C appartiennent a  
 la droite (d)

$$\text{car } 2 - 2 \times \frac{5}{2} + 3 = 0 \text{ et } 6 - 2 \times \frac{9}{2} + 3 = 0, \text{ on a (d)}$$

$\perp (GH)$  signifie que (AC)  $\perp$  (GH) donc AKCG est un  
 losange de plus (AG)  $\perp$  (AK) car  $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{AK}$   
 donc AKCG est un carré.

5) D'après 3) H est le milieu de [AC] et [GK] donc H  
 est le centre de carré AKCG par suite A, K, C et G  
 appartient au cercle C de centre H est de rayon AH  
 D'après 1) le triangle AFC est rectangle en F donc le  
 centre de cercle circonscrit associer est le  
 milieu de [AC] qui est le point H et de rayon AH,  
 cela confirme que le point F appartient au cercle C.  
 Donc les points A, C, F, G et K appartient au même  
 cercle de centre H est de rayon AH.





12

SE PERFECTIONNER

1) le coefficient directeur de  $D$  est  $\frac{1}{2}$  d'où

$$D: y = \frac{1}{2}x + b.$$

Or  $A(4, 6) \in D$  donc  $6 = 2 + b$  et par suite  $b = 4$   
ainsi  $D: y = \frac{1}{2}x + 4$ .

2)a)  $D$  est tangent à  $\zeta$  donc le rayon  $R$  du cercle  $\zeta$  est:  $R = d(I, D)$ .

Or  $D: \frac{1}{2}x - y + 4 = 0$  et  $I(-1, 1)$  donc

$$R = \frac{\left| \frac{-1}{2} - 1 + 4 \right|}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1}} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \sqrt{5} \text{ d'où : } (x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$$

b)  $H(x, y)$  est le point de contact de  $\zeta$  et  $D$ ; on a ainsi:

$$\begin{cases} H \in D \\ \overrightarrow{IH} \perp \vec{u} \end{cases} \text{ ou } \vec{u} \text{ est un vecteur directeur de } D$$

•  $H \in D$  signifie  $y = \frac{1}{2}x + 4$

•  $\overrightarrow{IH} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix}; \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  donc  $x+1 + \frac{1}{2}(y-1) = 0$

et par suite  $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = 0$

On a ainsi le système suivant: 
$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 4(1) \\ x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = 0(2) \end{cases}$$

(2) s'écrit:  $x + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x + 4) + \frac{1}{2} = 0$  signifie que

$x + \frac{1}{4}x + \frac{5}{2} = 0$  et par suite  $\frac{5}{4}x + \frac{5}{2} = 0$  d'où

$x = -2; y = 3$

Conclusion:  $H(-2, 3)$  est le point de contact de  $\zeta$  et  $D$ .

3)  $\Delta: ax + by + c = 0$  tangente à  $\zeta$  issue de B

donc 
$$\begin{cases} d(I, \Delta) = \sqrt{5} \\ 2a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{|-a + b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{5} (1) \\ c = -2a \end{cases} (2)$$

(1) donne  $|-3a + b| = \sqrt{5(a^2 + b^2)}$

$\Rightarrow (-3a + b)^2 = 5(a^2 + b^2)$

$\Rightarrow 2b^2 + 3ab - 2a^2 = 0$

C'est une équation de second degré ou l'inconnue est  $b$ .

$\Delta = 9a^2 + 16a^2 = 25a^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5|a|$  et par suite

$b = \frac{-3a - 5|a|}{4}$  ou bien  $b = \frac{-3a + 5|a|}{4}$

Donc  $b = -2a$  ou bien  $b = \frac{1}{2}a$ .

Ainsi on a trouvé deux droites tangentes à  $\zeta$  issue de B:

$\Delta: ax - 2ay - 2a = 0$

$\Delta': ax + \frac{1}{2}ay - 2a = 0$

13

SE PERFECTIONNER

1)a)  $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 - 2 = 0$

$\Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 2$

Donc  $\zeta$  est un cercle de centre  $I(0; 1)$  et de rayon

$R = \sqrt{2}$

b)  $0 + 1 - 1 = 0 \Rightarrow I \in \Delta$

2)a)  $(-1)^2 + (2-1)^2 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow M \in \zeta$

b)  $\Delta'$  tangente au cercle  $\zeta$  en  $M \Rightarrow \overrightarrow{IM}$  est un vecteur normal à  $\Delta'$

$\overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} -1-0 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc  $\Delta': -x + y + c = 0$  comme  $M \in \Delta'$

Donc  $1 + 2 + c = 0 \Rightarrow c = -3$

d'où  $\Delta': -x + y - 3 = 0$

c)  $\Delta: y = -x + 1$  et  $\Delta': y = x + 3$

$(-1) \times 1 = -1$  Donc  $\Delta \perp \Delta'$

d) soit  $D$  l'autre tangente à  $\zeta$  et perpendiculaire à

$\Delta$  comme  $\overrightarrow{IM}$  est un vecteur normal de  $D$

$D: -x + y + c = 0$ ;

$d(I, D) = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{|1+c|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |1+c| = 2 \Rightarrow 1+c = 2$

Ou  $1+c = -2$

$\Rightarrow c = 2$  Ou  $c = -3$

$D: -x + y + 1 = 0$  Ou  $D: -x + y - 3 = 0$





3)a)  $d(G, EF) = ?$

Soit  $H$  le projeter orthogonal de  $G$  sur  $(EF)$   
donc  $(GH)$  est la médiatrice de  $[EF]$  (car le triangle  $EFG$  est équilatéral) donc le triangle  $GHE$  est rectangle en  $H$

D'après Pythagore :  $EG^2 = GH^2 + HE^2$

$$a^2 = GH^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow GH^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$$

$$\text{Donc } GH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

b) les droites sont parallèles à  $\Delta$ , donc le vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  de  $\Delta$  est aussi un vecteur

directeur pour eux.

Donc ils sont de la forme  $x + y + c = 0$ , IAB est

un triangle équilatéral donc  $d(I, (AB)) = a \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{Or } d(I, (AB)) = \frac{|1+c|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |1+c| = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 1+c = \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad 1+c = -\sqrt{3}$$

$$\text{Donc } c = -1 + \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad c = -1 - \sqrt{3}$$

Par suite les équations des droites parallèles à  $\Delta$  qui coupent le cercle en deux points A et B tels que IAB est un triangle équilatéral sont :

$$x + y + \sqrt{3} - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x + y - \sqrt{3} - 1 = 0$$





Droites et plans de l'espace  
Parallélisme dans l'espace

I) Résumé de cours

A) Solides usuels :volumes et section par un plan

Pavé droit	Pyramide	Tétraèdre
<div><math>V = DH \times DC \times DA</math></div>	<div><math>V = \frac{1}{3} \times Base \times hauteur</math></div>	<div><math>V = \frac{1}{3} \times Base \times hauteur</math></div>
La section d'un pavé droit par un <b>plan parallèle à une arête</b> est un <b>rectangle</b> , dont l'une des dimensionscorrespond à la longueur de cette arête.	La section d'une pyramide par un <b>plan parallèle à la base</b> est une réduction de la base.	La section d'un tétraèdre par un <b>plan parallèle à la base</b> est une réduction de la base.
Sphère	Cône de révolution	Cylindre de révolution
<div><math>V = \frac{4}{3} \pi R^3</math></div>	<div><math>V = \frac{1}{3} \times (\pi R^2) \times hauteur</math></div>	<div><math>V = \pi \times R^2 \times hauteur</math></div>
La section d'une sphère de centre O par un plan est un <b>cercle</b> de centre O'. Lorsque le plan ne passe pas par le centre de la sphère, la droite (OO') est perpendiculaire au plan de section.	La section d'une cône de révolution par un <b>plan parallèle à la base</b> est une réduction de la base.	■ La section d'un cylindre de révolution par un plan perpendiculaire à son axe est un cercle de même rayon que la base ■ La section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à son axe est un rectangle



**B) Les règles d'incidence****1) Règles de base****Règle 1:**

Par deux points distincts  $A$  et  $B$  de l'espace, il passe une et une seule droite.

**Règle 2:**

On ne peut mener qu'une unique droite parallèle à une droite donnée par un point extérieur à cette droite.

**Règle 3:**

Par 3 points  $A, B$  et  $C$  distincts et non alignés de l'espace, il passe un et un seul plan ( $ABC$ ).

**Remarque:**

Par 4 points (ou plus!) de l'espace, il ne passe pas forcément un plan. Il suffit de penser à un tabouret: un tabouret à 3 pattes sera toujours stable, ce n'est pas nécessairement le cas d'un tabouret à 4 pattes!

**Règle 4:**

Si  $A$  et  $B$  sont deux points d'un plan  $P$ , alors tous les points de la droite  $(AB)$  appartiennent au plan.

**2) Caractérisation d'un plan****a) Deux droites sécantes**

Deux droites sécantes définissent un unique plan.

**b) Une droite et un point extérieur**

Une droite et un point n'appartenant pas à cette droite, définissent un unique plan.





c) Deux droites strictement parallèles

Deux droites strictement parallèles définissent un unique plan.



Définition:

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace. A, B, C et D sont **coplanaires** si et seulement si ils sont situés dans un même plan.

Remarque :

Attention, il est nécessaire de prendre 4 points pour l'étude de la coplanarité car 3 points de l'espace sont **toujours** coplanaires.

C) *Positions relatives de droites et plans*

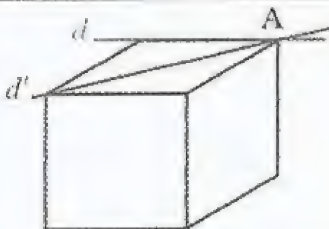
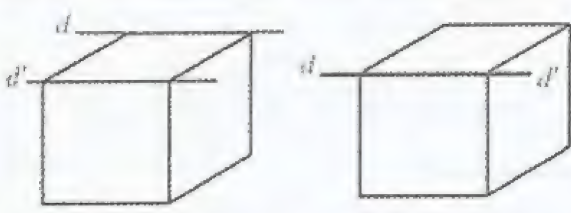
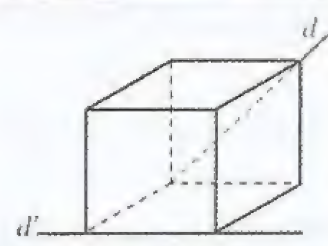
1) Positions relatives de deux droites

Définition:

Deux droites (D) et (D') sont dites **coplanaires** lorsqu'elles sont **incluses** dans un même plan.

Définition:

Deux droites (D) et (D') sont dites **parallèles** lorsqu'elles sont coplanaires et non sécantes.

Droite coplanaires		Droites non coplanaires
sécantes	parallèles	
 $(d) \cap (d') = \{A\}$	 $(d) \cap (d') = \emptyset$ $(d) \cap (d') = (d) = (d')$	 $(d) \cap (d') = \emptyset$

Remarques :

- Si deux droites n'ont aucun point commun alors :
  - soit elles sont non coplanaires,
  - soit elles sont coplanaires et strictement parallèles.
- Deux droites parallèles sont toujours coplanaires.

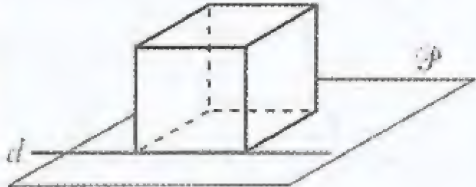
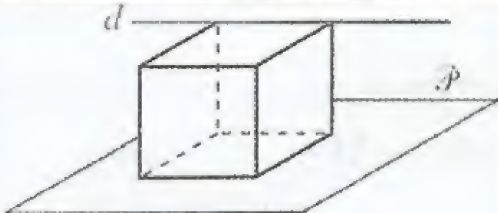
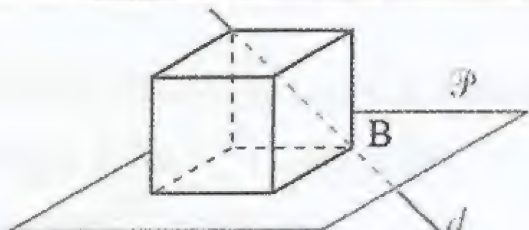




## 2) Positions relatives d'une droite et d'un plan

### Définition :

- Une droite de l'espace et un plan sont sécants lorsqu'ils ont un seul point commun.
- Lorsqu'ils ne sont pas sécants, on dit que la droite est parallèle au plan.

Droites et plans parallèles		Droites et plans sécants
 <p>(d) est incluse ou contenue dans P <math>(d) \subset P</math> et <math>(d) \cap P = (d)</math></p>	 <p>(d) est strictement parallèle à P <math>(d) // P</math> et <math>(d) \cap P = \emptyset</math></p>	 <p>(d) coupe P en B, la droite et le plan ont un unique point d'intersection : B <math>(d) \cap P = \{B\}</math></p>

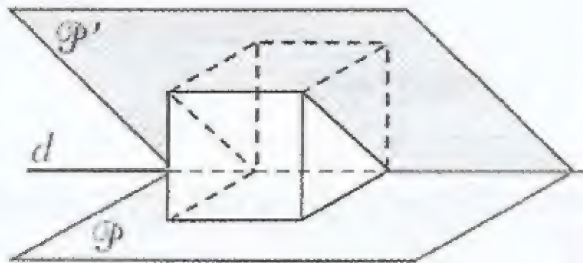
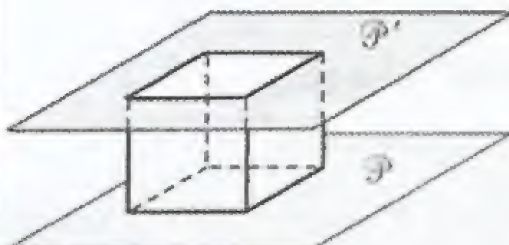
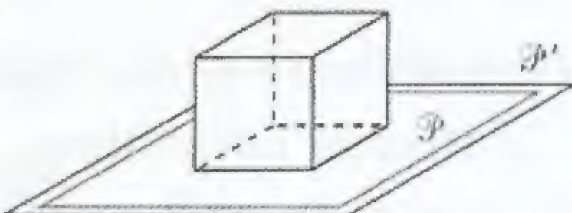
### Définition :

Une droite (d) est parallèle à un plan P signifie que le plan P contient au moins une droite parallèle à (d)

## 3) Positions relatives de deux plans

### Définition :

Deux plans de l'espace sont sécants lorsqu'ils ont une seule droite commune.  
Quand deux plans ne sont pas sécants, on dit qu'ils sont parallèles.

Plans sécants	Plans parallèles	
 <p><math>P \cap P' = (d)</math></p>	 <p><math>P \cap P' = \emptyset</math></p>	 <p><math>P = P'</math> et <math>P \cap P' = P = P'</math></p>



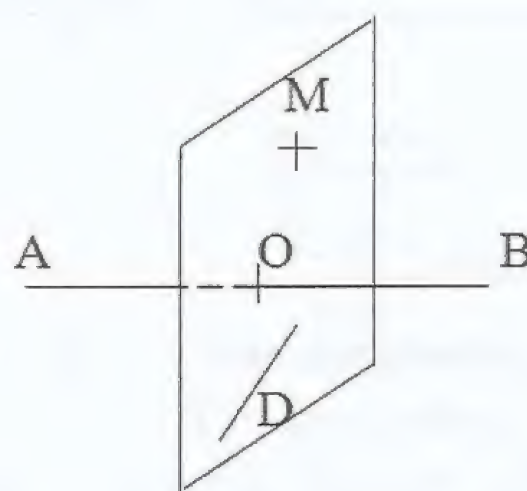
**4) Plan médiateur d'un segment :****Définition :**

On appelle le plan médiateur d'un segment le plan perpendiculaire à ce segment en son milieu

**Théorème :** L'ensemble des points équidistant des extrémités d'un segment est le plan médiateur de ce segment.

**Retenons :** Plan médiateur d'un segment :

- a)  $M \in P_m[AB]$  signifie  $MA = MB$
- b)  $(AB) \perp P_m[AB]$
- c)  $D \subset P_m[AB]$  alors  $D \perp (AB)$

**5) Axe d'un cercle :****Définition :**

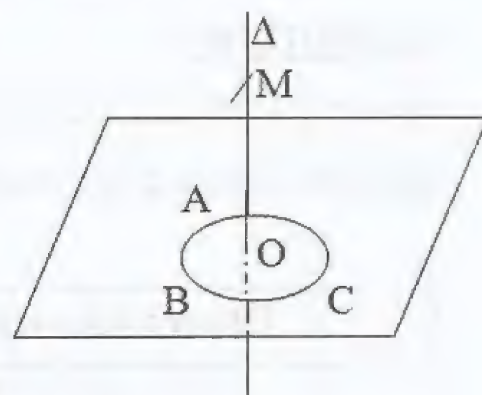
On appelle l'axe d'un cercle la droite passant par le centre de ce cercle et perpendiculaire à son plan.

**Théorème :** L'ensemble des points équidistant de tous les points d'un cercle est l'axe de ce cercle

**Remarque :** Pour montrer q'un point appartient à l'axe d'un cercle C il suffit de montrer q'il équidistant à trois points distincts du cercle C.

**Retenons :** Axe d'un cercle  $\mathcal{C}(O, r)$

- 1)  $\Delta$  est la droite passant par O et perpendiculaire au plan P contenant  $\mathcal{C}$ .
- 2) Si  $M \in \Delta$  alors M est équidistant à tout point de  $\mathcal{C}$ .
- 3) Si M est équidistant à trois points distincts de  $\mathcal{C}$  alors  $M \in \Delta$

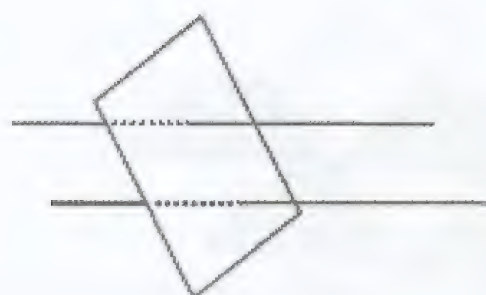
**D) Parallélisme dans l'espace****1) Droites parallèles**

► Deux droites  $D_1$  et  $D_2$  parallèles à une même troisième droite D sont parallèles entre elles.

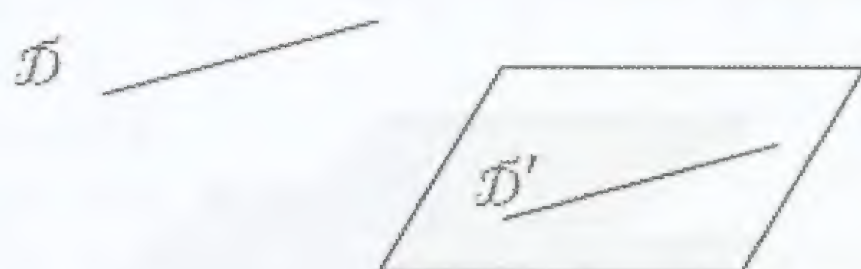


► Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.



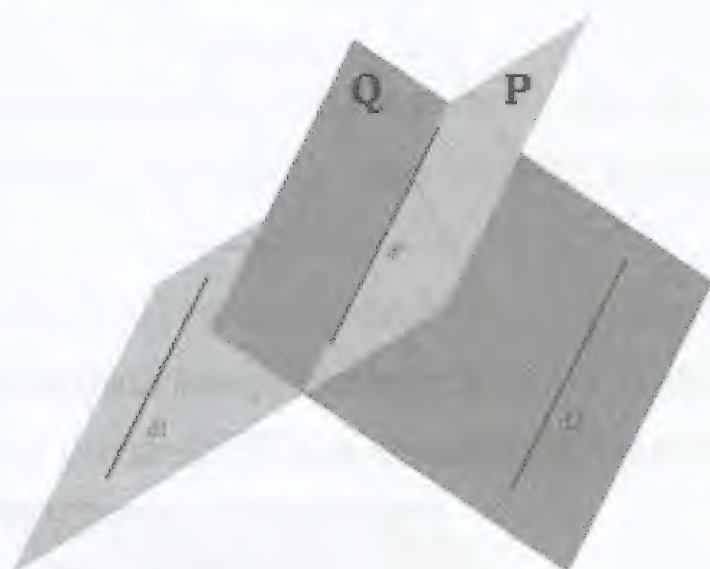


► On dit qu'une droite  $D$  est parallèle à un plan lorsqu'il existe une droite  $D'$  du plan telle que  $D // D'$ .

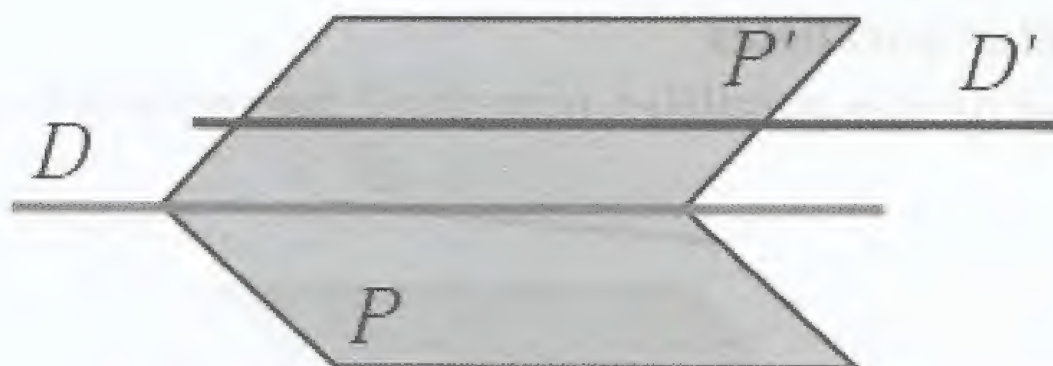


► Les deux versions du théorème « du toit »

■ Si deux droites  $d_1$  et  $d_2$  parallèles et situées dans deux plans sécants  $P$  et  $Q$  respectivement alors  $d_1$  et  $d_2$  sont parallèles à  $d$  l'intersection de  $P$  et  $Q$ .

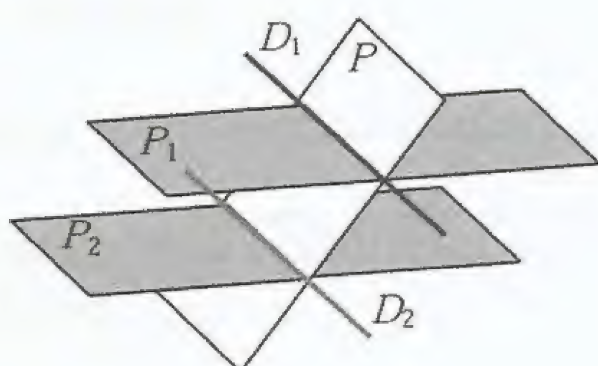


■ Si  $P$  et  $P'$  sont deux plans sécants suivant une droite  $D$ , toute droite  $D'$  parallèle à  $P$  et  $P'$  est parallèle à  $D$ .



► Si  $P_1$  et  $P_2$  sont deux plans parallèles, tout plan  $P$  qui coupe  $P_1$  coupe aussi  $P_2$  et les droites d'intersection  $D_1$  et  $D_2$  sont parallèles.



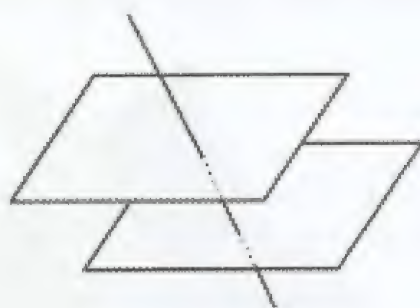


## 2) Plans parallèles

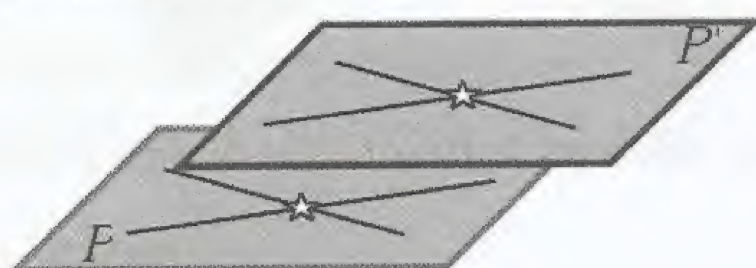
► Deux plans  $P_1$  et  $P_2$  parallèles à un même troisième plan  $P$  sont parallèles entre eux.



► Si deux plans sont parallèles, alors toute droite qui coupe l'un coupe l'autre.

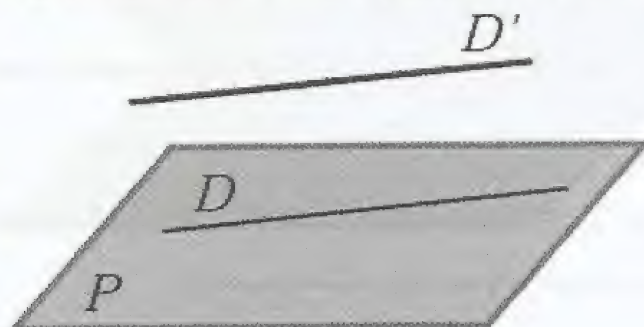


► Si deux droites sécantes d'un plan  $P$  sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan  $P'$ , les plans  $P$  et  $P'$  sont parallèles.



## 3) Droite et plan parallèles

► Si  $D$  et  $D'$  sont deux droites parallèles, tout plan  $P$  qui contient  $D$  est parallèle à  $D'$ .





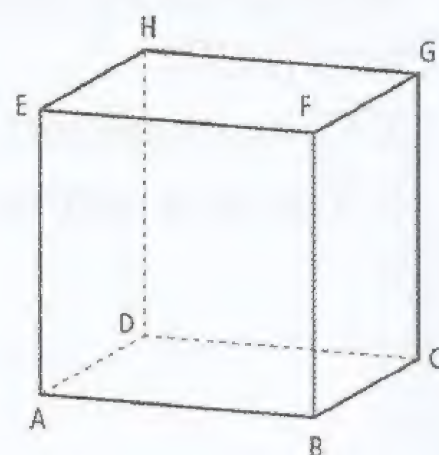


## II) Exercices :



## Q-C-M

- 1) Parmi les affirmations suivantes quelle est celle qui exacte
  - a) Une droite parallèle à deux plans sécants est parallèle à leur intersection
  - b) Deux droites parallèles à un même plan sont parallèles entre eux
  - c) Deux plans parallèles à une même droite sont parallèles entre eux
- 2) La figure représente un cube ABCDEFGH. Que peut-on dire du triangle FDH ?
  - a) FDH est isocèle en F
  - b) FDH est rectangle en F
  - c) FDH est rectangle en H
- 3) La figure représente un cube ABCDEFGH. Parmi les trois droites suivantes, quelle est celle qui est orthogonal à (AD) ?
  - a) (CH)
  - b) (CF)
  - c) (BG)
- 4) Parmi les affirmations suivantes quelle est celle qui exacte
  - a) Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles
  - b) Deux plans perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre eux
  - c) Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre eux
- 5) La figure représente un cube ABCDEFGH. Parmi les droites suivantes quelle est celle qui est perpendiculaire au plan (EBC)
  - a) (CF)
  - b) (DG)
  - c) (AH)



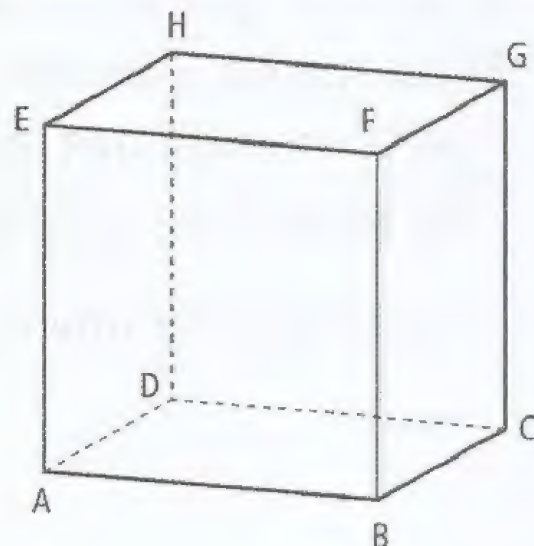
## Q-C-M

Cocher la bonne réponse :

ABCDEFGH un cube de l'espace de coté 4cm

- |                     |                     |                     |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1) $GF = 4$         | 2) $GF = 6$         | 3) $GF = 10$        |
| 1) $AF = 2\sqrt{2}$ | 2) $AF = 3\sqrt{3}$ | 3) $AF = 4\sqrt{2}$ |
| 1) $AG = 4\sqrt{2}$ | 2) $AG = 4\sqrt{3}$ | 3) $AG = 5\sqrt{3}$ |

La surface de EFB =







1) 8

2) 6

3) 10

Le volume de la pyramide EFBG =

1)  $\frac{35}{3}$

2)  $\frac{32}{3}$

3)  $\frac{37}{3}$

On note I le milieu de [EG], la distance BI =

1)  $2\sqrt{6}$

2)  $2\sqrt{5}$

3)  $4\sqrt{3}$

La surface de EBG =

1)  $6\sqrt{3}$

2)  $7\sqrt{3}$

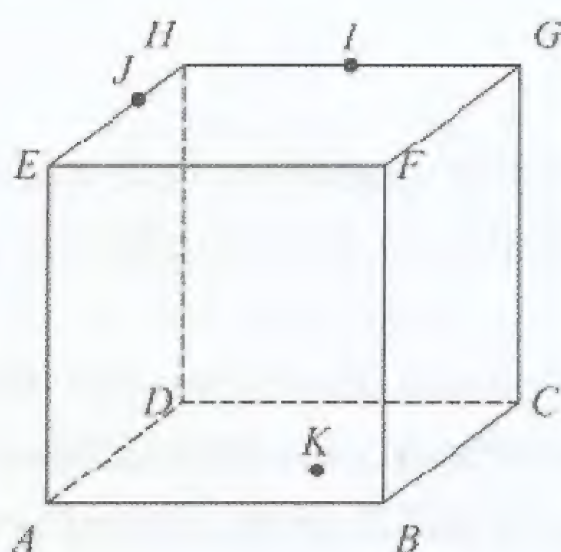
3)  $8\sqrt{3}$



### APPLIQUER

$ABCDEFGH$  est un cube.  $I$  et  $J$  sont deux points des arêtes  $[GH]$  et  $[EH]$ , et  $K$  est dans le plan  $(BCD)$ .

1. Construire l'intersection des plans  $(ABC)$  et  $(IJK)$ . Justifier la construction.
2. Tracer la section du cube par le plan  $(IJK)$ .

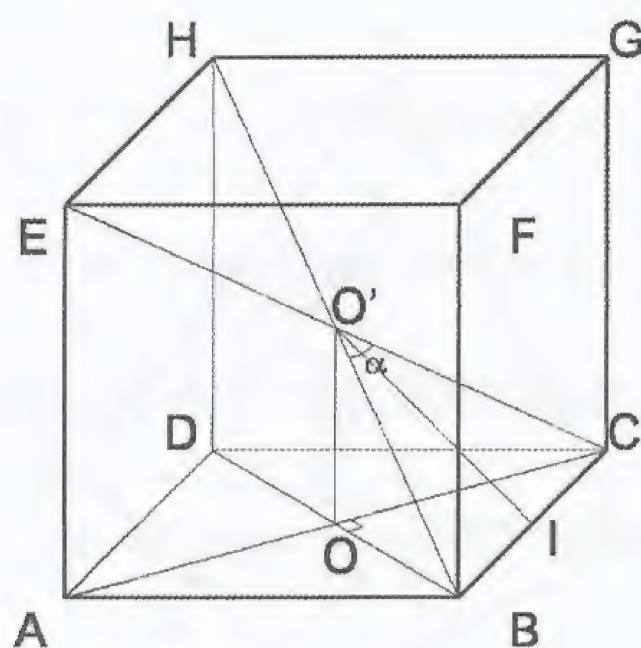


### APPLIQUER

Soit  $ABCDEFGH$  un cube d'arêtes de longueur  $a$  et  $O$  le centre du carré  $ABCD$ . Soit  $I$  le milieu du segment  $[AB]$ .

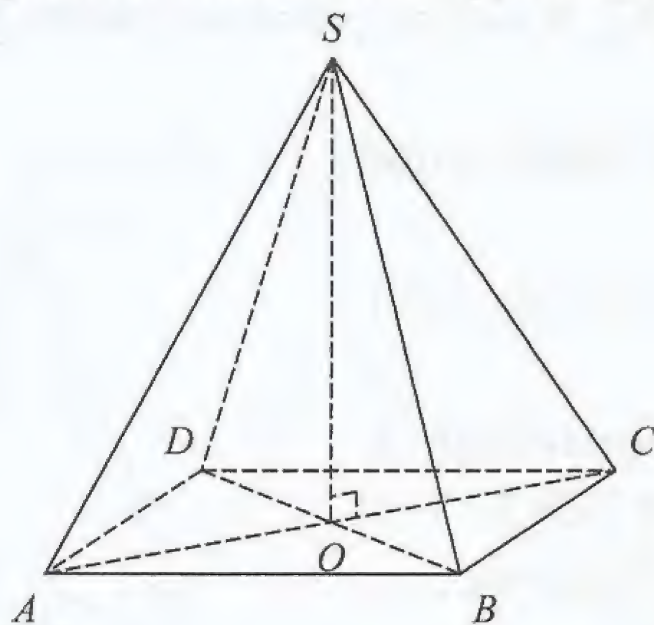
- 1) a) Démontrer que la droite  $(EH)$  est orthogonale au plan  $(ABF)$ .
- b) Montrer que  $EBCH$  est un rectangle. Ses diagonales se coupent en  $O'$ .
- 2) On appelle  $\alpha$  la mesure de l'angle  $\widehat{BO'C}$ .
  - a) Démontrer que les droites  $(O'I)$  et  $(EB)$  sont parallèles.
  - b) En déduire que  $\widehat{CEB} = \frac{\alpha}{2}$ .
  - c) Déterminer une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près.





### 5 APPLIQUER

$SABCD$  est une pyramide régulière à base carrée dont toutes les arêtes mesurent  $a$ .  $O$  est le centre de  $ABCD$  et  $[SO]$  est la hauteur de la pyramide



1) Exprimer  $AC$  et  $AO$  en fonction de  $a$ .

2) Montrer que  $SO = a \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

3) Déterminer, en fonction de  $a$ , le volume de  $SABCD$ .

4) Calculer ce volume lorsque  $a = \sqrt{2}$  cm.

NB : on conservera les valeurs exactes.

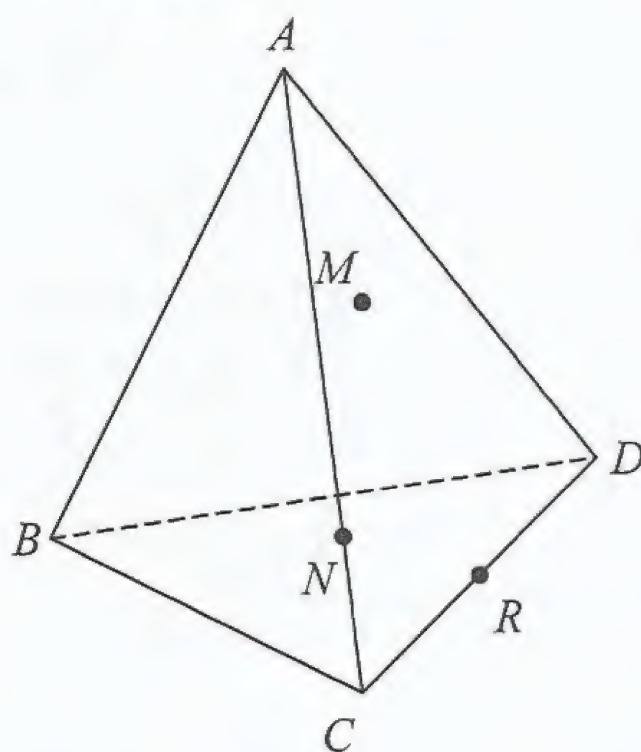
5) Lorsque  $a = \sqrt{2}$  cm,  $\text{Volume}(SABCD) = \frac{\sqrt{2}^3 \times \sqrt{2}}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ cm}^3$ .

### 6 APPLIQUER

$ABCD$  est un tétraèdre.  $M$  est un point de la face  $ABD$ ,  $N$  un point de  $[AC]$  et  $R$  un point de  $[CD]$ .

Construire la section du tétraèdre  $ABCD$  par le plan  $(MNR)$ .



**APPLIQUER**

$SABCD$  est une pyramide de sommet  $S$  et dont la base  $ABCD$  est un parallélogramme.  $M$  est un point de l'arête  $[SC]$ ,  $N$  est un point de l'arête  $[SB]$ , et  $(MN)$  est parallèle à  $(BC)$ .

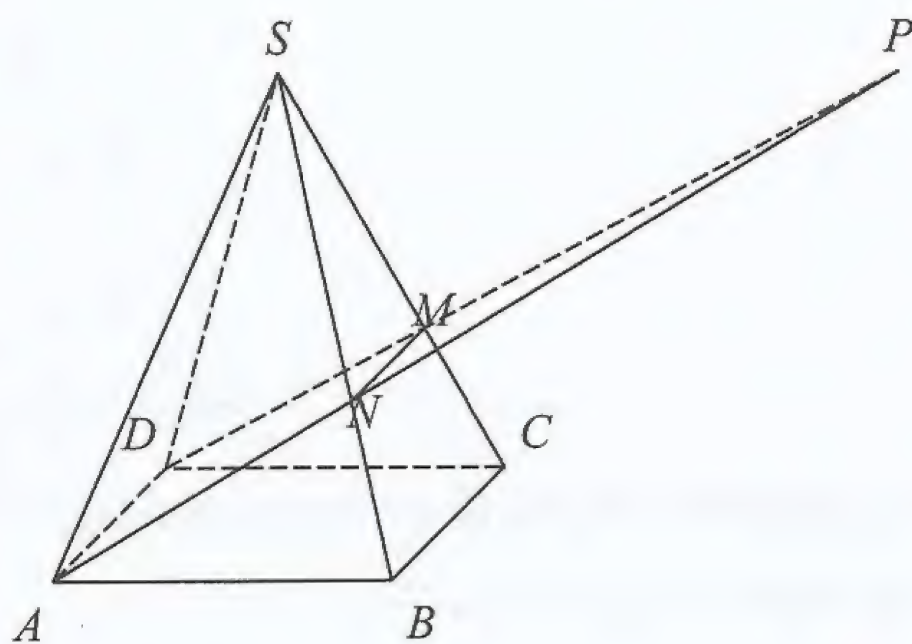
1) Montrer que  $(AD)$  et  $(MN)$  sont parallèles.

2) Dans le plan  $(ADM)$ , les droites  $(AN)$  et  $(DM)$  se coupent en  $P$ .

a) Démontrer que  $P$  appartient à chacun des plans  $(SAB)$  et  $(SDC)$ .

b) Pourquoi la droite d'intersection des plans  $(SAB)$  et  $(SDC)$  est-elle la droite  $(SP)$  ?

3) En déduire que  $(SP)$  est parallèle à  $(AB)$  et à  $(CD)$ .

**S'ENTRAINER**

$ABCD$  est un tétraèdre.  $I$  est le milieu de  $[AB]$ ,  $J$  est le milieu de  $[AC]$  et  $K$  est le point de  $[AD]$  tel que  $AK = \frac{1}{4}AD$ .

Démontrer que  $(IJ)$  est parallèle  $(BC)$ .

**S'ENTRAINER**

$OABC$  est un tétraèdre dont les faces  $OAB$ ,  $OAC$  et  $OBC$  sont des triangles rectangles isocèles en  $O$ , et  $ABC$  est un triangle équilatéral. On pose  $OA = OB = OC = a$  (on a donc  $AB = AC = BC = a\sqrt{2}$ ).



1) Démontrer que la droite  $(OA)$  est orthogonale au plan  $(OBC)$ .

2) Calculer en fonction de  $a$  le volume du tétraèdre  $OABC$ .

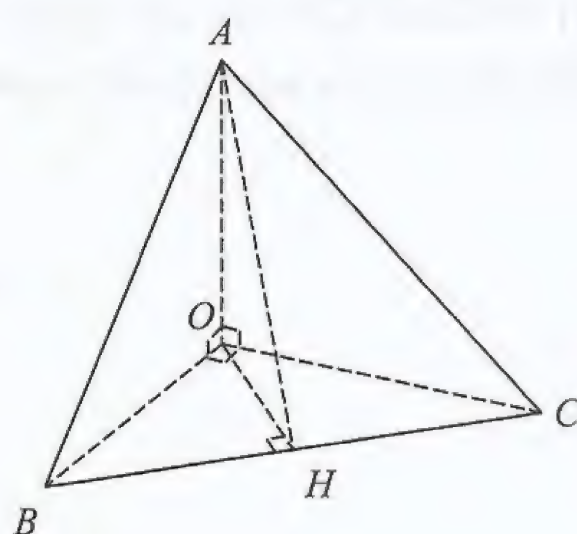
3)  $H$  est le pied de la hauteur issue de  $O$  dans  $OBC$  ( $H$  est donc le milieu de  $[BC]$ ).

Exprimer  $OH$  en fonction de  $a$ , puis montrer que

$$AH = a \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

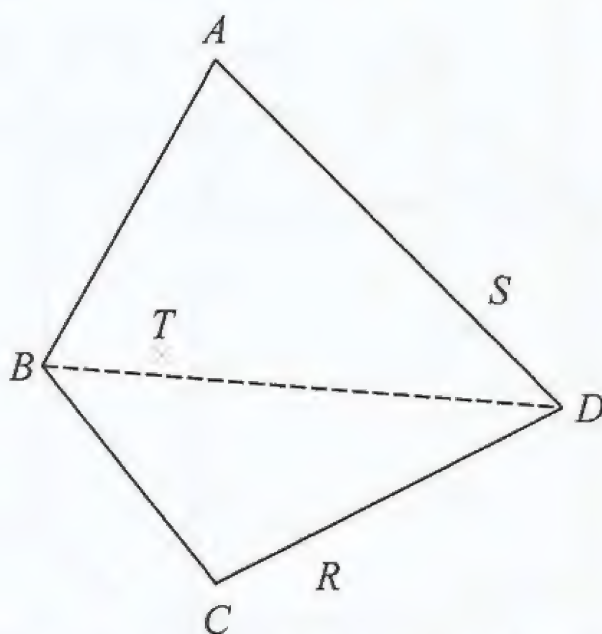
4) Calculer l'aire du triangle  $ABC$ .

5) Dédurre des questions 2. et 4. La longueur de la hauteur issue de  $O$  du tétraèdre  $OABC$ .

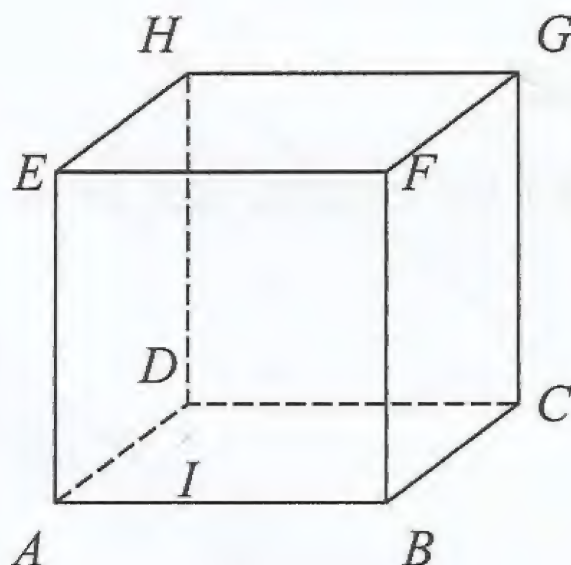


## 10 S'ENTRAINER

1)  $ABCD$  est un tétraèdre,  $T \in (ABC)$ ,  $S \in [AD]$  et  $R \in [CD]$ . Construire la section du tétraèdre  $ABCD$  par le plan  $(RST)$ .



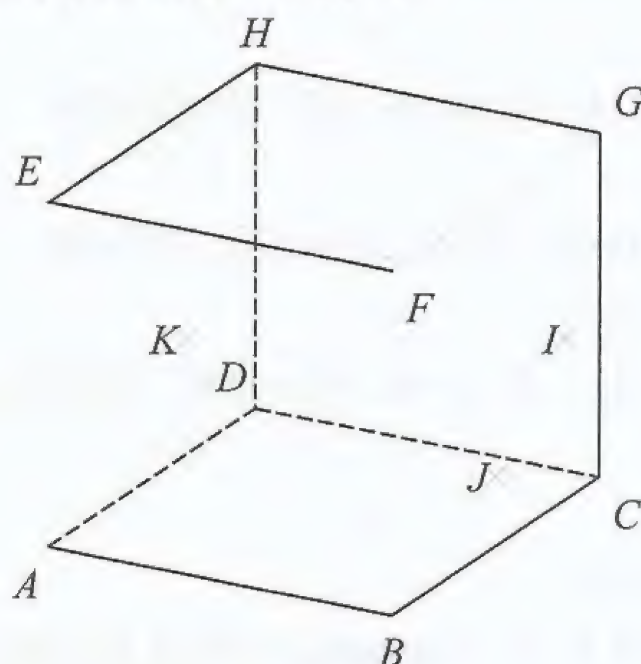
2)  $ABCDEFGH$  est un cube, et  $I$  est dans la face  $ABFE$ . Construire la section du cube par le plan  $(IBG)$ .







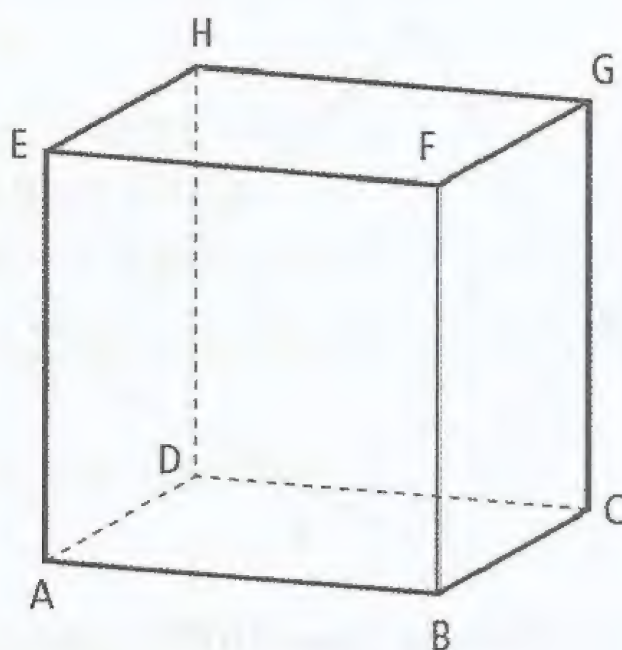
3)  $ABCDEFGH$  est un cube,  $I$  et  $J$  sont dans la face  $BCGF$ , et  $K$  est dans la face  $ABFE$ . Construire la section du cube par le plan  $(IJK)$ .



### S'ENTRAINER

Dans le cube ci-dessous, déterminer :

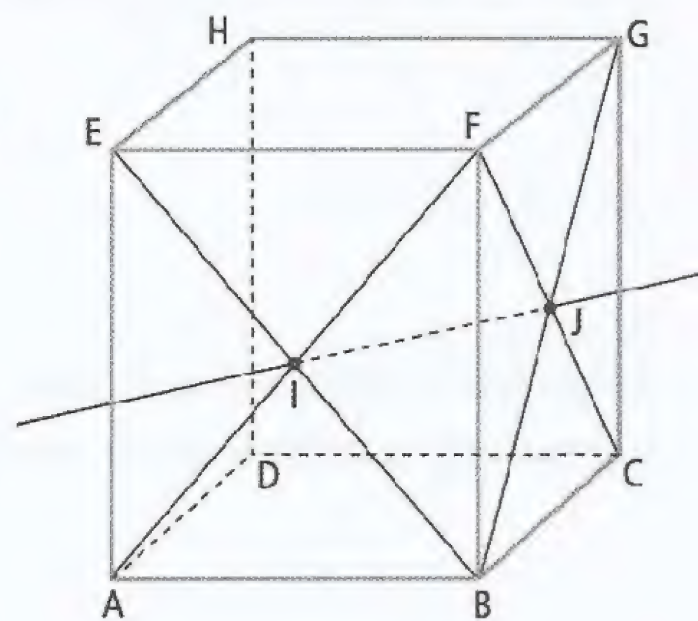
$(AC) \cap (EFGH)$ ,  $(BG) \cap (EFGH)$ ,  $(EF) \cap (EFGH)$ ,  $(AB) \cap (EFGH)$  et  $(BF) \cap (EFGH)$ .



### SEPERFECTIONNER

Dans le cube, on appelle  $I$  et  $J$  les centres des faces  $ABFE$  et  $BCGF$ . Montrer que :

$(IJ) \parallel (EFG)$ .

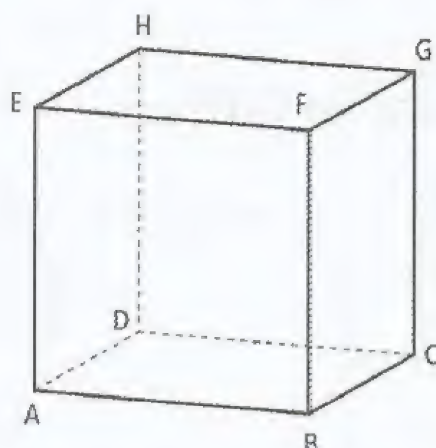




13

### SEPERFECTIONNER

Dans le cube ABCDEFGH,



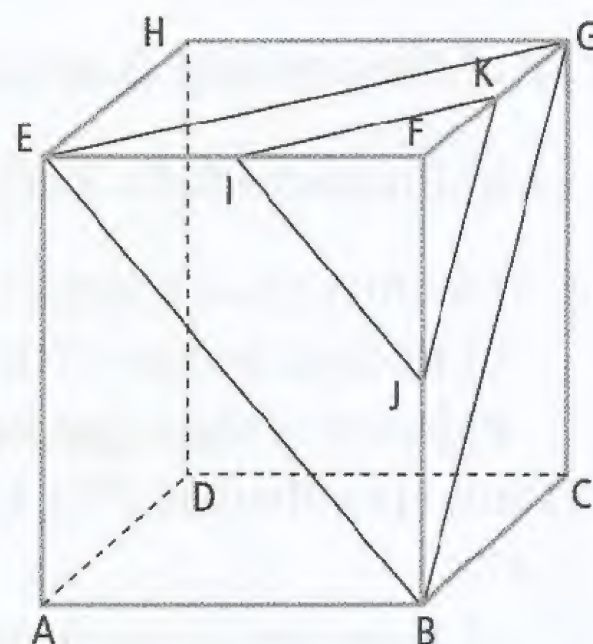
Déterminer :

$(FGCB) \cap (EFGH)$ ,  $(EBC) \cap (EFGH)$ ,  $(ABCD) \cap (EFGH)$ ,  $(EFG) \cap (EFGH)$ .

14

### SEPERFECTIONNER

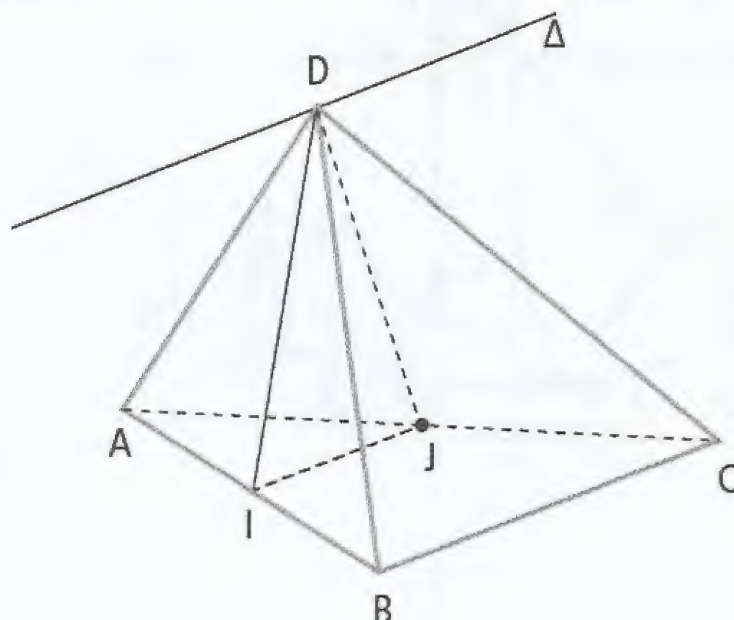
Dans le cube ABCDEFGH, on considère I le milieu de [EF], J celui de [BF] et K celui de [FG]. Montrer que les plans (EBG) et (IJK) sont parallèles.



15

### SEPERFECTIONNER

ABCD est un tétraèdre, I est le milieu de [AB] et J le milieu de [AC]. Déterminer l'intersection des plans (BCD) et (IJD).





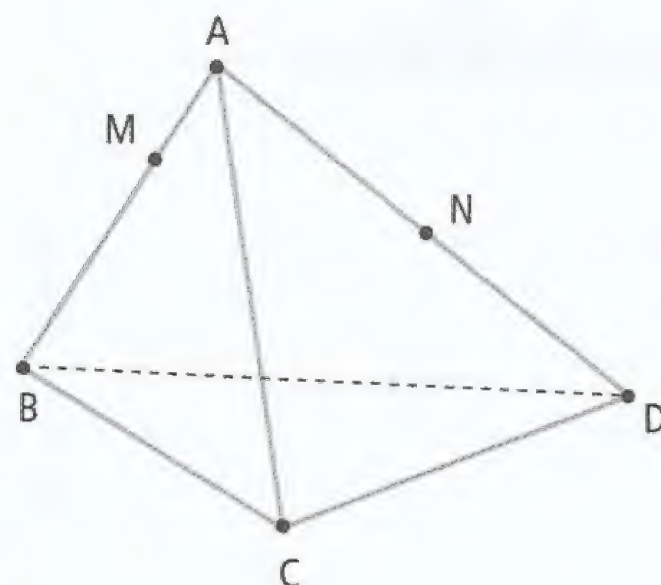


16

**SEPERFECTIONNER**

Soient ABCD un tétraèdre, M un point de [AB] tel que  $AM = \frac{1}{3}AB$  et N le milieu de [AD].

Déterminer :  $(MN) \cap (BCD)$ .



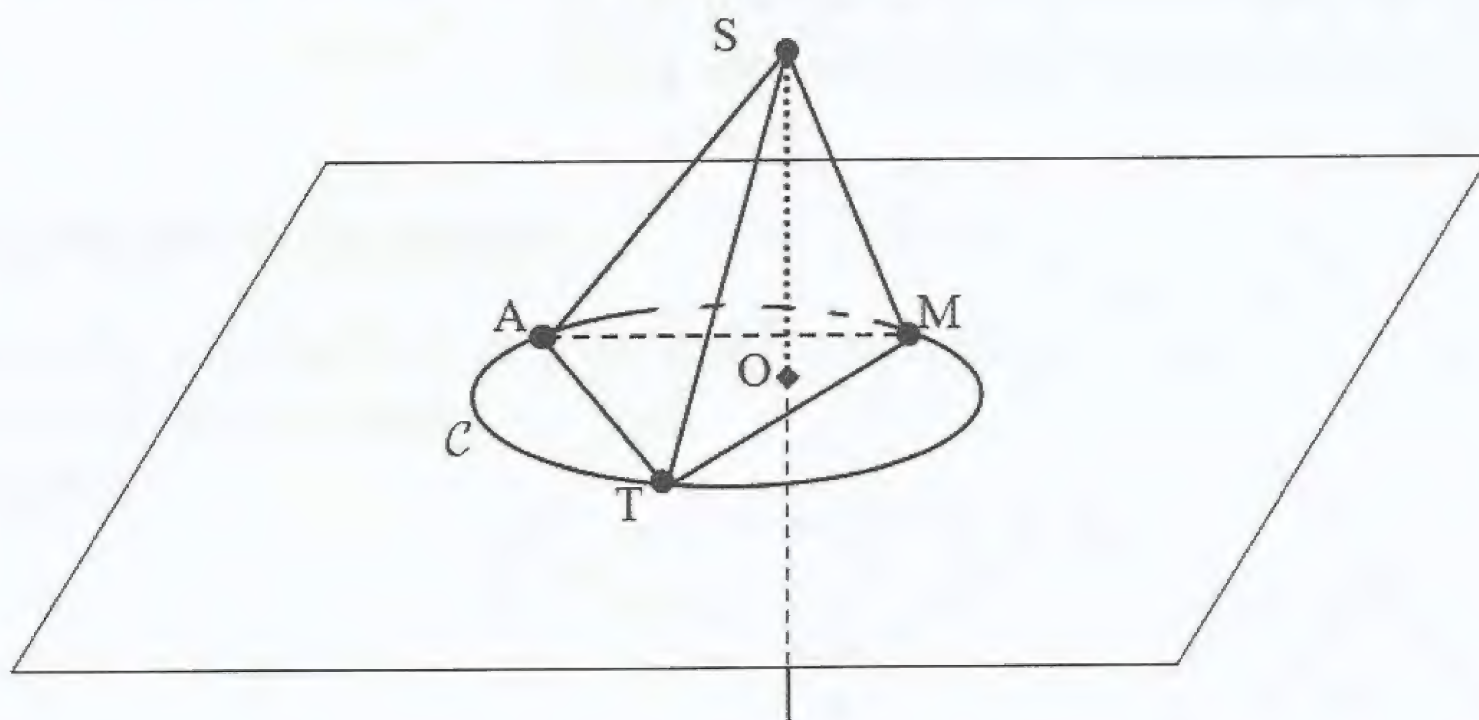
17

**SEPERFECTIONNER**

On considère la figure ci-dessous où SATM est un tétraèdre tel que les faces SAT et STM sont des triangles équilatéraux.

La droite  $\Delta$  passant par S est perpendiculaire au plan P en un point O.

- 1) a) Montrer que  $\Delta$  est l'axe du cercle  $\mathcal{C}$  circonscrit au triangle ATM.
- b) On donne  $SM = 3$  et  $\sin(\widehat{AMT}) = \frac{3}{4}$ ; calculer le rayon R du cercle  $\mathcal{C}$  et SO.
- 2) a) Montrer que la droite (TO) est perpendiculaire à (AM).
- b) En déduire que (TOS) est le plan médiateur du segment [AM].
- c) Montrer alors que les plans (STO) et (SAM) sont perpendiculaires.
- 3) Soit I le milieu de [ST], G et G' les centres de gravité respectifs des triangles STM et ATS.
- a) Montrer que les droites (GG') et (AM) sont parallèles.
- b) En déduire que (GG') est orthogonale à (ST)
- c) Déterminer  $(SAO) \cap (SGG')$ .





### 1 Q-C-M

- 1) a) 2) c) 3) a) 4) c) 5) b)

### 2 Q-C-M

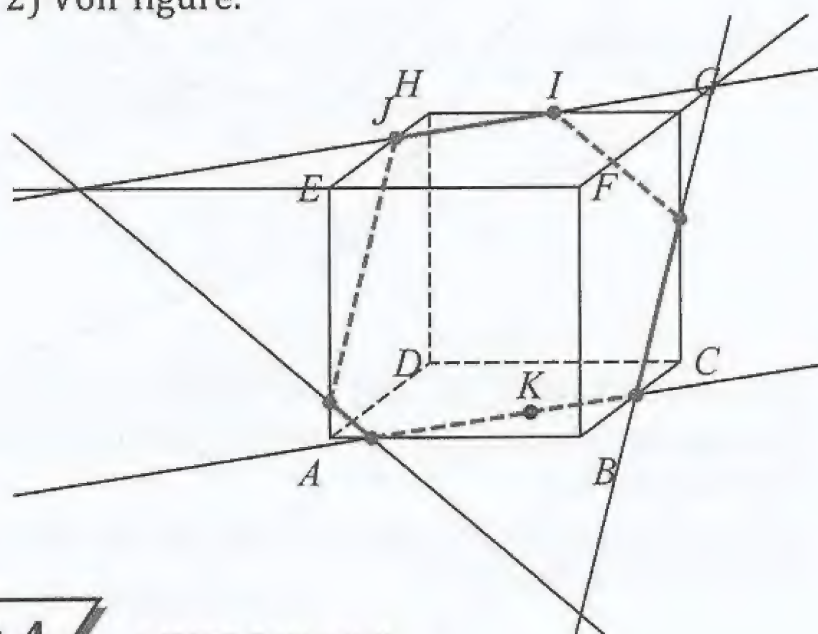
$GF = 4$  ;  $AF = 4\sqrt{2}$  ;  $AG = 4\sqrt{3}$  ; surface de  $EFB = 8$  ; le volume de  $EFBG = \frac{32}{3}$  ;

$BI = 2\sqrt{6}$  ; la surface de  $EBG = 8\sqrt{3}$

### 3 APPLIQUER

1) Les points  $I$  et  $J$  appartiennent aux plans  $(EFG)$  et  $(IJK)$ , donc la droite  $(IJ)$  est l'intersection des plans  $(EFG)$  et  $(IJK)$ . De plus, comme  $ABCDEFGH$  est un cube, les plans  $(ABC)$  et  $(EFG)$ , donc le plan  $(IJK)$  coupe ces deux plans, et les droites d'intersection sont parallèles. La droite d'intersection des plans  $(IJK)$  et  $(ABC)$  est donc la parallèle à  $(IJ)$  passant par  $K$ .

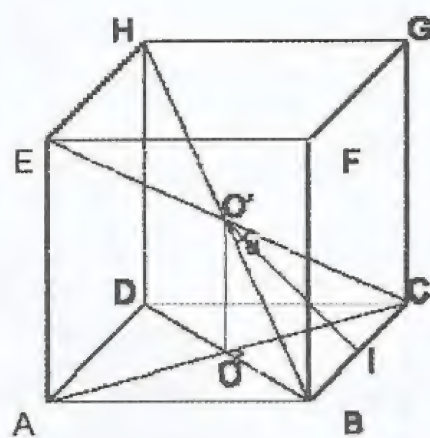
2) Voir figure.



### 4 APPLIQUER

1) a) Comme  $ABCDEFGH$  est un cube, la droite  $(EH)$  est perpendiculaire aux droites  $(EF)$  et  $(EA)$ , sécantes dans le plan  $(ABF)$ . Donc  $(EH)$  est orthogonale au plan  $(ABF)$ .

b)  $BCGF$  et  $FGEH$  étant des carrés, on a



$\overline{BC} = \overline{FG}$  et  $\overline{FG} = \overline{EH}$ . On obtient donc  $\overline{BC} = \overline{EH}$ , ce qui prouve que  $EBCH$  est un parallélogramme. De plus, comme  $(EH)$  est orthogonale au plan  $(ABF)$ , alors  $(EH)$  est en particulier perpendiculaire à  $(EB)$ .

Le parallélogramme  $EFGH$  a donc un angle droit, ce qui prouve que c'est un rectangle.

2. On appelle  $\alpha$  la mesure de l'angle  $\widehat{BO'C}$ .

a.  $O'$  est le milieu de  $[CE]$  (car centre du rectangle  $EBCH$ ) et  $I$  est le milieu de  $[BC]$ . En appliquant le théorème des milieux au triangle  $BCE$ , on obtient bien que les droites  $(IO')$  et  $(BE)$  sont parallèles.

b. Les droites  $(O'I)$  et  $(BE)$  sont parallèles.

Les angles correspondants  $\widehat{CEB}$  et  $\widehat{CO'I}$  sont donc égaux.

De plus,  $BH = CE$  (diagonales du rectangle  $EBCH$ ), donc  $BO' = O'C$  et  $BO'C$  est isocèle en  $O'$ .  $I$  étant le milieu de  $[BC]$ ,  $(O'I)$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{BO'C}$ , et  $\widehat{CO'I} = \frac{\alpha}{2}$ , et  $\widehat{CEB} = \frac{\alpha}{2}$  ( $= \widehat{CO'I}$ ).

c. Dans le triangle  $EBC$  rectangle en  $B$ ,  $\tan \frac{\alpha}{2} = \tan$

$\widehat{CEB} = \frac{BC}{BE} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7071$ . On obtient

donc  $\frac{\alpha}{2} \approx 35,26^\circ$  et  $\alpha \approx 70,5^\circ$ .

### 5 APPLIQUER

1)  $AC = a\sqrt{2}$  (diagonale d'un carré de côté  $a$ ) et

$AO = a\frac{\sqrt{2}}{2}$  (car  $O$  est le centre du carré  $ABCD$ ).

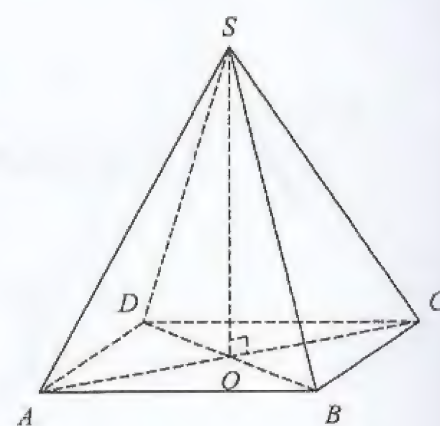
2) Dans le triangle  $SAO$ , d'après le théorème de Pythagore :

$$SO^2 + OA^2 = SA^2, SO^2 + \left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2,$$

$$SO^2 + \frac{2a^2}{4} = a^2, SO^2 = a^2 - \frac{2a^2}{4} = \frac{4a^2}{4} - \frac{2a^2}{4} = \frac{2a^2}{4},$$

$$SO = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3) Volume  $(SABCD) = \frac{1}{3} \times \text{Air}(ABCD) \times SO$





$$= \frac{1}{3} \times a^2 \times a \frac{\sqrt{2}}{2} = a^3 \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

4. Lorsque  $a = \sqrt{2}$  cm,  $\text{Volume}(SABCD)$

$$= \frac{\sqrt{2}^3 \times \sqrt{2}}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ cm}^3.$$

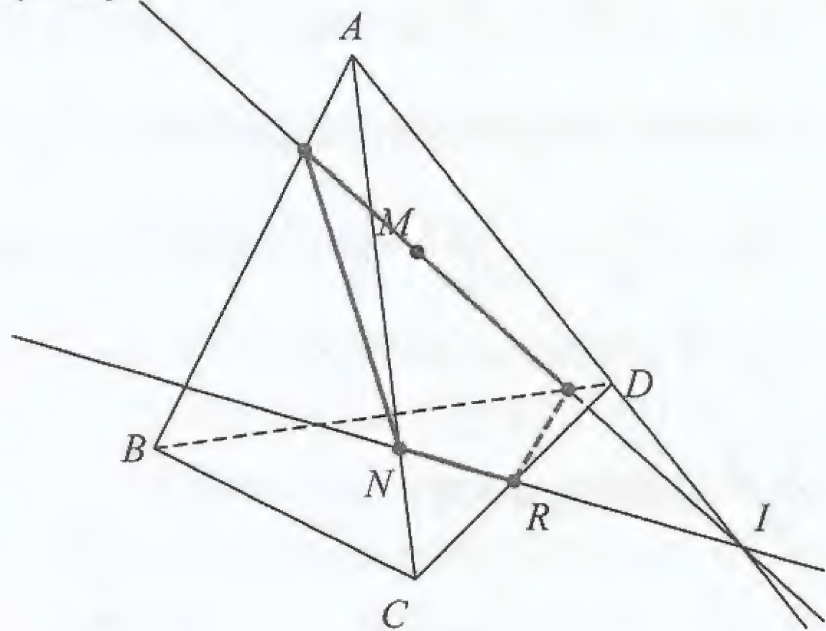
## 6 APPLIQUER

Il est évident que la droite  $(NR)$  est l'intersection des plans  $(MNR)$  et  $(ACD)$ .

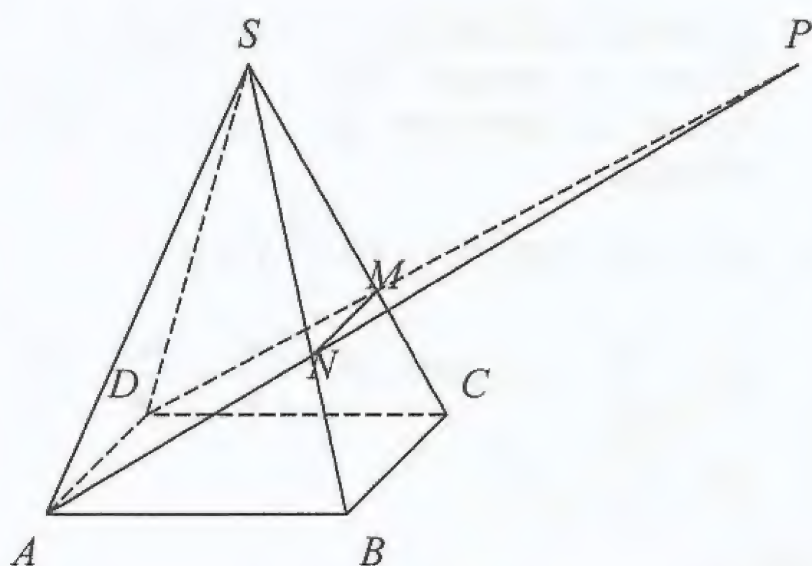
$M$  est un point de la face  $ABD$ , et les droites  $(NR)$  (de  $(ACD)$ ) et  $(AD)$  (de  $(ABD)$ ) se coupent en  $I$  (car sécantes dans le plan  $(ACD)$ ).

La droite  $(MI)$  est donc l'intersection des plans  $(MNR)$  et  $(ABD)$ .

$(MI)$  coupe les arêtes  $[BD]$  et  $[AB]$ , ce qui permet d'obtenir la section du tétraèdre  $ABCD$  par le plan  $(MNR)$ .



## 7 APPLIQUER



1.  $(AD)$  et  $(MN)$  sont parallèles à la droite  $(BC)$ , donc elles sont parallèles.

2. Dans le plan  $(ADM)$ , les droites  $(AN)$  et  $(DM)$  se coupent en  $P$ .

a. La droite  $(AN)$  appartient au plan  $(SAB)$ , donc  $P$  aussi (car  $P \in (AN)$ ).

La droite  $(DM)$  appartient au plan  $(SDC)$ , donc  $P$  aussi (car  $P \in (DM)$ ).

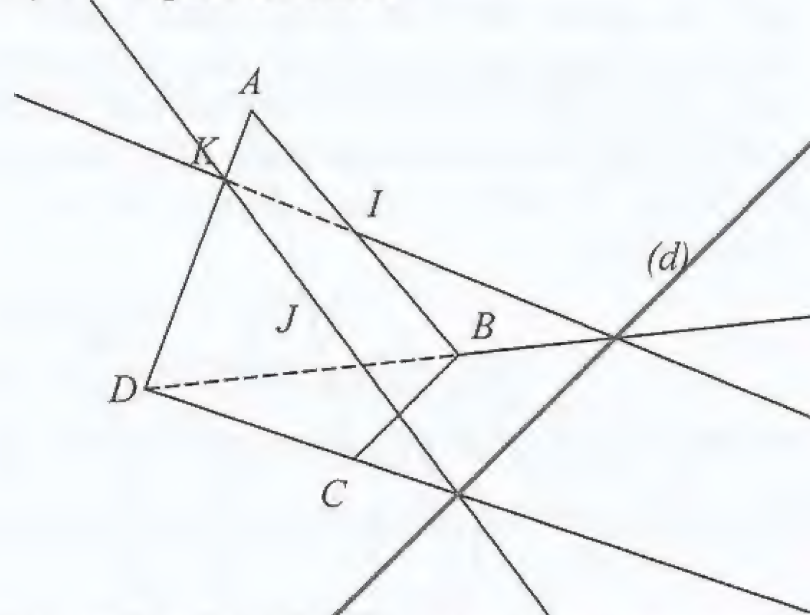
b.  $S$  et  $P$  appartiennent aux plans  $(SAB)$  et  $(SDC)$ , donc la droite d'intersection des plans  $(SAB)$  et  $(SDC)$  est la droite  $(SP)$ .

c.  $(AB)$  (du plan  $(SAB)$ ) et  $(CD)$  (du plan  $(SDC)$ ) sont parallèles donc, d'après le théorème du toit, elles sont parallèles également à l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire la droite  $(SP)$ .

## 8 S'ENTRAINER

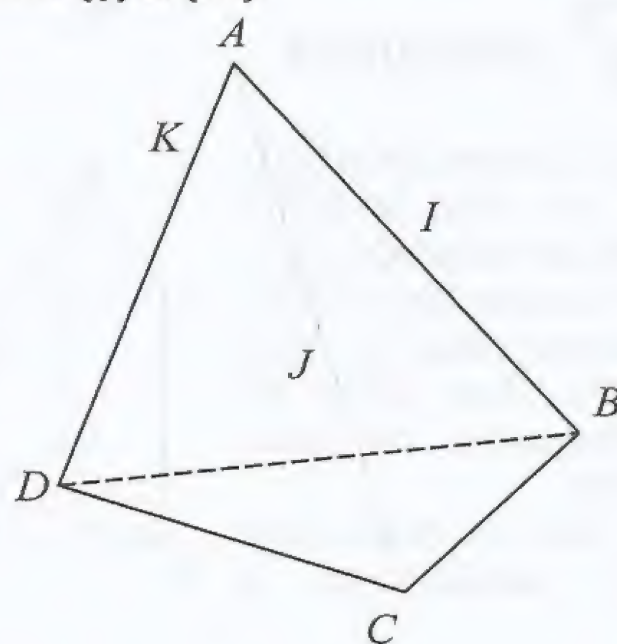
1) Dans le triangle  $ABC$ ,  $I$  est le milieu de  $[AB]$  et  $J$  est le milieu de  $[AC]$  donc, d'après le théorème des milieux,  $(IJ)$  est parallèle  $(BC)$ .

2) Voir figure ci-contre.



3) Les plans  $(DCB)$  et  $(IJK)$  sont sécants suivant  $(d)$ . De plus, les droites  $(IJ)$  (de  $(IJK)$ ) et  $(BC)$  (de  $(DBC)$ ) sont parallèles.

Donc, d'après le théorème du toit,  $(d)$  est parallèle aux droites  $(IJ)$  et  $(BC)$ .

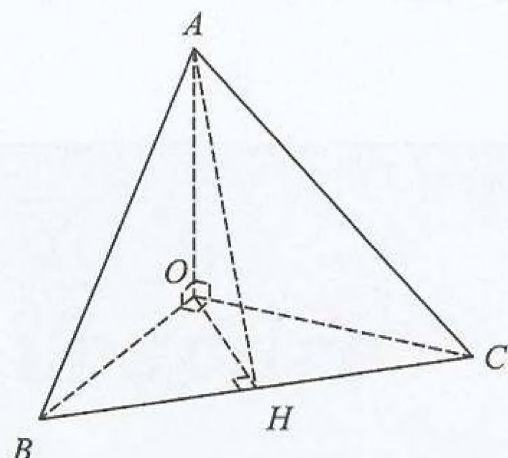






9

## S'ENTRAINER



1)  $(OA)$  est perpendiculaire aux droites  $(OB)$  et  $(OC)$  (sécantes dans le plan  $(OBC)$ ), donc  $(OA)$  est orthogonale au plan  $(OBC)$ .

$$2) \text{Volume}(OABC) = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(OBC) \times AO$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{a \times a}{2} \times a = \frac{a^3}{6}.$$

3)  $H$  étant le milieu de  $[BC]$ ,  $[OH]$  est la médiane relative à l'hypoténuse du triangle  $OBC$  rectangle en  $O$ , donc  $OH = \frac{1}{2} BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

$(OA)$  est orthogonale au plan  $(OBC)$  donc  $AOH$  est rectangle en  $O$ .

D'après le théorème de Pythagore :  $AH^2 = AO^2 + OH^2$ ,  $AH^2 = a^2 + \frac{2a^2}{4} = \frac{6}{4}a^2$ ,

$$AH = \sqrt{\frac{6a^2}{4}} = a \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$4) \text{Aire}(ABC) = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{a\sqrt{2} \times a \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} \\ = a^2 \frac{\sqrt{12}}{4} = a^2 \frac{\sqrt{4 \times 3}}{4} = a^2 \frac{2\sqrt{3}}{4} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5) Soit  $h$  la longueur de la hauteur issue de  $O$  du tétraèdre  $OABC$ .

$$\text{Volume}(OABC) = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(ABC) \times h,$$

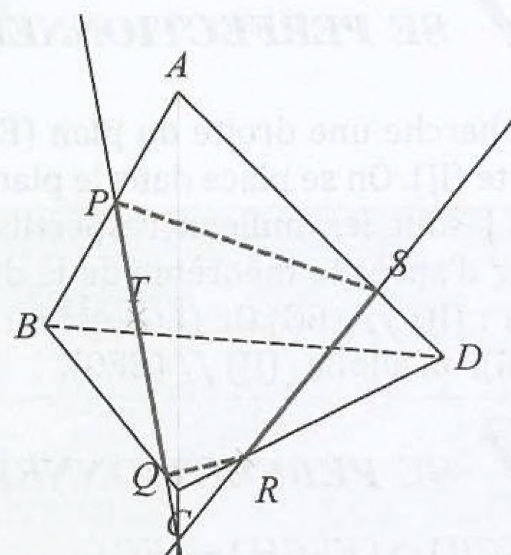
$$\text{soit } \frac{a^3}{6} = \frac{1}{3} a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \times h = a^2 \frac{\sqrt{3}}{6} \times h$$

$$\text{donc } h = \frac{a^3}{a^2 \sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = a \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

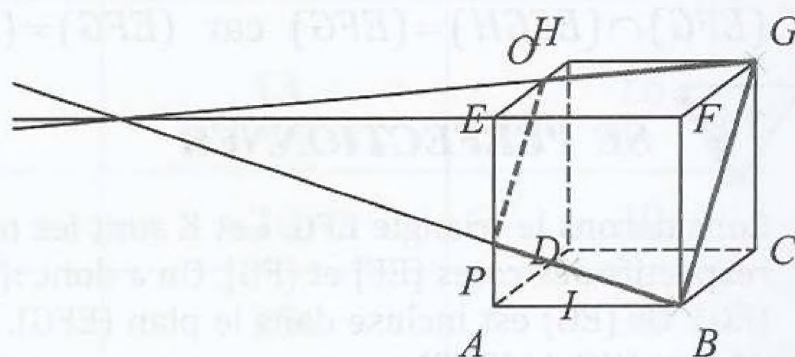
10

## S'ENTRAINER

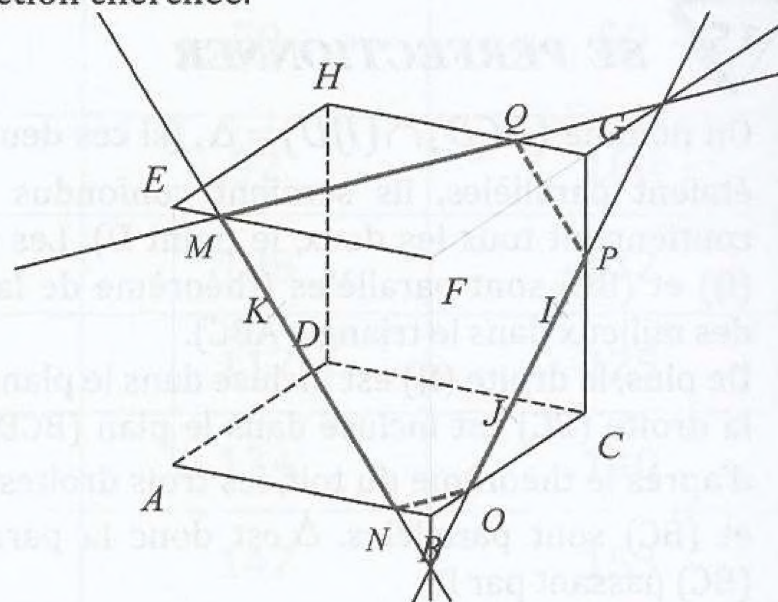
1)  $ABCD$  est un tétraèdre,  $T \in (ABC)$ ,  $S \in [AD]$  et  $R \in [CD]$ . Construire la section du tétraèdre  $ABCD$  par le plan  $(RST)$ .  $PQRS$  est la section cherchée.



2)  $ABCDEFGH$  est un cube, et  $I$  est dans la face  $ABFE$ . Construire la section du cube par le plan  $(IBG)$ .  $BGOP$  est la section cherchée.



3)  $ABCDEFGH$  est un cube,  $I$  et  $J$  sont dans la face  $BCGF$ , et  $K$  est dans la face  $ABFE$ . Construire la section du cube par le plan  $(IJK)$ .  $MNOPQ$  est la section cherchée.



11

## S'ENTRAINER

$$(AC) \cap (EFGH) = \emptyset,$$

$$(BG) \cap (EFGH) = \{G\},$$

$$(EF) \cap (EFGH) = (EF)$$

car la droite  $(EF)$  est incluse dans le plan  $(EFGH)$ ,

$$(AB) \cap (EFGH) = \emptyset,$$

$$(BF) \cap (EFGH) = \{F\}.$$





12

**SE PERFECTIONNER**

On cherche une droite du plan (EFG) parallèle à la droite (IJ). On se place dans le plan (EBG).

I et J sont les milieux respectifs de [EB] et [BG].  
Donc d'après le théorème de la droite des milieux, on a :  $(IJ) \parallel (EG)$ . Or (EG) est incluse dans le plan (EFG), on a donc :  $(IJ) \parallel (EFG)$ .

13

**SE PERFECTIONNER**

$$(FGCB) \cap (EFGH) = (FG),$$

$$(EBC) \cap (EFGH) = (EH),$$

$$(ABCD) \cap (EFGH) = \emptyset$$

$$(EFG) \cap (EFGH) = (EFG) \text{ car } (EFG) = (EFGH)$$

14

**SE PERFECTIONNER**

Considérons le triangle EFG. I et K sont les milieux respectifs des cotés [EF] et [FG]. On a donc :  $(IK) \parallel (EG)$ . Or (EG) est incluse dans le plan (EFG). On en déduit :  $(IK) \parallel (EFG)$ .

De la même façon, on démontre que :  $(IJ) \parallel (EFG)$ .

(IK) et (IJ) sont deux droites sécantes du plan (IJK).

On a donc :  $(IJK) \parallel (EFG)$ .

15

**SE PERFECTIONNER**

On nomme  $(BCD) \cap (IJD) = \Delta$ , (si ces deux plans étaient parallèles, ils seraient confondus car ils contiennent tous les deux, le point D). Les droites (IJ) et (BC) sont parallèles (théorème de la droite des milieux dans le triangle ABC).

De plus, la droite (IJ) est incluse dans le plan (IJD) et la droite (BC) est incluse dans le plan (BCD). Ainsi, d'après le théorème du toit, les trois droites (IJ),  $\Delta$  et (BC) sont parallèles.  $\Delta$  est donc la parallèle à (BC) passant par D.

16

**SE PERFECTIONNER**

La droite (BD) est incluse dans le plan (BCD) et est coplanaire sécante avec (MN).

$$\text{On a donc : } (MN) \cap (BCD) = (MN) \cap (BD) = \{I\}$$



# Sommaire

Chapitre		Pages		
		Résumé de cours	Énoncé	Correction
ALGÈBRE	Chap1: Calculs dans IR	5	7	10
	Chap2: Problèmes du premier degré et du second degré	12	13	18
	Chap3: Notion de polynômes	25	26	30
	Chap4: Arithmétique	34	35	38
	Chap5: Suite arithmétique-suite géométrique	41	45	50
	Chap6: Généralités sur les fonctions	54	59	50
	Chap7: Statistiques	75	92	100
GÉOMETRIE	Chap1: Calculs vectoriels	105	108	112
	Chap2: Barycentre	115	117	125
	Chap3: Translation	133	134	140
	Chap4: Homothétie	146	147	153
	Chap5: Rotation	161	162	167
	Chap6: Trigonométrie	172	175	178
	Chap7: Géométrie Analytique	182	184	189
	Chap8 : Droites et plans de l'espace Parallélisme dans l'espace	194	201	209



# 2<sup>ème</sup>

Deuxième année de l'enseignement secondaire

## Kounouz Ennaje

### MATHEMATIQUES

Sections : Scientifiques

**+ Corrigés Détaillés**  
de tous les exercices

Ce parascolaire s'adresse aux élèves de l'enseignement secondaire. Son principal objectif est de venir en aide aux apprenants. D'ailleurs, le livre se donne les moyens de ses objectifs.

En effet, ce parascolaire se veut un allié de l'apprentissage des mathématiques. Il allie cours, approfondissement et enrichissement des connaissances. Dans un souci d'efficacité, nous avons délibérément choisi de suivre la démarche et la progression proposées dans le manuel scolaire. Par conséquent, les modules présentés vont en parallèle avec ceux du manuel scolaire afin de mieux répondre aux attentes et aux besoins des élèves. Ainsi, à l'instar du manuel, chaque chapitre s'organise autour de plusieurs activités :

- Résumés du cours
- Exercices
- Corrigés des exercices

### ■ Dans la même Collection



#### 7<sup>ème</sup> année de Base

العربية – الفرنسية – الإنكليزية – علوم الحياة والأرض – الرياضيات  
الفيزياء – تربية تقنية – امتحانات

#### 8<sup>ème</sup> année de Base

العربية – الفرنسية – الإنكليزية – علوم الحياة والأرض – الرياضيات  
الفيزياء – تربية تقنية – امتحانات

#### 9<sup>ème</sup> année de base

العربية – الفرنسية – الإنكليزية – علوم الحياة والأرض – الرياضيات  
الفيزياء – تربية تقنية – امتحانات – جذاذات

#### 1<sup>ème</sup> année de l'enseignement secondaire

تربية تقنية – الرياضيات  
العربية – الفرنسية – الإنكليزية – امتحانات  
Devoirs- informatique- SVT  
Physique, chimie

#### 2<sup>ème</sup> année de l'enseignement secondaire

تربية تقنية – الرياضيات  
العربية – الفرنسية – الإنكليزية – امتحانات  
Devoirs- informatique- SVT  
Physique, chimie

#### 3<sup>ème</sup> année de l'enseignement secondaire

تربية تقنية – الرياضيات – تاريخ و جغرافيا  
العربية – الفرنسية – الإنكليزية  
Devoirs- informatique- SVT- Economie.Gestion  
Technologie- Physique, chimie

#### 4<sup>ème</sup> année de l'enseignement secondaire

تربية تقنية – الرياضيات – تاريخ و جغرافيا  
العربية – الفرنسية – الإنكليزية  
Devoirs- informatique- SVT  
Economie.Gestion  
Technologie- Physique, chimie